

Vektorgeometrie

Nachhilfestunde zur Vektorgeometrie

Themen

Eine komplizierte Ebenenschar in Parameterform
Lineare Unabhängigkeit von Vektoren mit Parameter
Allerlei aufwändige Rechnungen

Keine schöne Aufgabe, aber mit viel intensivem Rechnen!!

Datei Nr. 63454

1992.2.3

Stand: 27. Februar 2026

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

Aufgabe

Gegeben ist für $t \in \mathbb{R}$ die Punktmenge $E_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ 4t + 8 \\ t^2 - 4t - 4 \end{pmatrix}$

- 1 Für welche Werte von t ist E_t eine Ebene?
- 2 Bestimme die Schnittmenge von E_{-2} und E_1 .
- 3 Überprüfe, ob die Ebenschar E_t ein Ebenenbündel ist.
- 4 Die Punkte $A(4 | 1 | -1)$, $B(5 | 3 | -2)$ und $C(6 | 5 | 2)$ legen eine weitere Ebene E fest.
Gib eine Gleichung von E an.
- 5 Bestimme die Schnittmenge M_t von E_t mit der Ebene E in Abhängigkeit von t .
Für welchen Wert von t ist M_t keine Gerade?
- 6 Für welchen Wert von t liegt $P(-13 | -49 | 32)$ in der Ebene E_t ?

Lösung

1

Für welche Werte von t ist $E_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_a + r \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}_u + s \cdot \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ 4t + 8 \\ t^2 - 4t - 4 \end{pmatrix}_v$ eine Ebene?

E_t ist eine Ebene, wenn die Vektoren \vec{u} und \vec{v} **linear unabhängig** sind.

Sie sind in zwei Fällen **linear abhängig**:

1. Fall: Wenn sie Vielfachen voneinander sind:

$$\text{Ansatz: } \vec{v} = k \cdot \vec{u} \quad \text{d. h.} \quad \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ 4t + 8 \\ t^2 - 4t - 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t + 4 = 2kt & (1) \\ 4t + 8 = 0 & (2) \\ t^2 - 4t - 4 = kt^2 - 2kt & (3) \end{cases}$$

$$\text{Aus (2) folgt} \quad 4t = -8 \Leftrightarrow \boxed{t = -2} \quad (4)$$

$$\text{Aus (1) folgt} \quad 4t - 2kt + 4 = 0 \quad (5)$$

$$(4) \text{ in (5):} \quad -8 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow 4k = 4 \Leftrightarrow \boxed{k = 1}$$

$$\text{Probe in (3):} \quad 4 + 8 - 4 = 4 + 4 \text{ ist eine wahre Aussage.}$$

2. Fall: Wenn ein Richtungsvektor für ein spezielles t zum Nullvektor wird.

Man sieht sofort, dass für $t = 0$ der Fall ist. Dann wird $\vec{u} = \vec{0}$ und E_0 ist eine Gerade!

Ergebnis: E_t ist eine Ebene für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$, sonst eine Gerade:

$$\text{Für } t = 0 \text{ ist } E_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_a + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}_v \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_a + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_v \text{ eine Gerade}$$

$$\text{Für } t = -2 \text{ ist } E_{-2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_a + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}_u + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}_v \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_a + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_u \text{ eine Gerade.}$$

2 Bestimme die Schnittmenge von E_2 und E_1 .

E_1 ist die Ebene mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{a}} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\vec{u}} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix}_{\vec{v}}$$

Es ist günstig, zu E_1 eine Koordinatengleichung zu finden:

Der **Normalenvektor** sei $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$. Bedingungen: $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow 2n_1 - n_3 = 0$ (1)

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow 8n_1 + 12n_2 - 7n_3 = 0 \quad (2)$$

Wähle $n_1 = 1 \Rightarrow n_3 = 2n_1 = 2$. In (3): $12n_2 = 7n_3 - 8n_1 = 14 - 8 = 6 \Rightarrow n_2 = \frac{1}{2}$

Normalenvektor. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1: x + \frac{1}{2}y + 2z = d$.

Punktprobe mit $A(3 | -1 | 0)$: $d = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Koordinatengleichung von E_1 : $x + \frac{1}{2}y + 2z = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \boxed{2x + y + 4z = 5}$

Schnitt von E_1 und E_2 :

1. Lösung:

Setze E_2 koordinatenweise in E_1 ein: $2 \cdot \boxed{3-r} + \boxed{-1} + 4 \cdot \boxed{2r} = 5$

Daraus folgt $6r = 0 \Rightarrow r = 0$

Schnittpunkt $E_1 \cap E_2 = \{S\}$ $S(3 | -1 | 0)$

2. Lösung:

Gleichsetzen der Terme der Parameteregleichungen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{a}} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\vec{u}} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{a}} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{w}}$$

$$\begin{cases} 2r + 8s + t = 0 & (1) \\ 12s = 0 \Rightarrow \boxed{s = 0} & (2) \\ -r - 7s - 2t = 0 & (3) \end{cases}$$

Aus (2) folgt $s = 0$. In (1) : $2r + t = 0$ (4)

In (3): $-r - 2t = 0$ (5)

Elimination von t: $2 \cdot (4) + (5)$: $3r = 0 \Rightarrow \boxed{r = 0}$

Schnittpunkt $E_1 \cap E_2 = \{S\}$ $S(3 | -1 | 0)$

3 Ein **Ebenenbündel** ist eine Menge von Ebenen, die alle eine gemeinsame Gerade enthalten.

Um zu zeigen, dass eine Ebenenschar kein Ebenenbündel ist, kann man **entweder** überprüfen woraus die Schnittmenge von drei Ebenen dieser Schar besteht, oder überprüfen, ob die Schnittgerade zweier Ebenen in der dritten Ebene liegt.

Ich wähle als Beispiel diese drei Ebenen:

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.:} \quad \boxed{2x + y + 4z = 5}$$

$$E_{-1}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{v}}$$

$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{u}} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}_{\vec{v}} \quad \text{bzw.:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Schnitt von E_1 und E_{-1} :

Berechnung durch koordinatenweises Einsetzen von E_{-1} in die Koordinatengleichung von E_1 :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad 2x + y + 4z = 5$$

$$2 \cdot \boxed{3 - 2r} + \boxed{-1 + 4s} + 4 \cdot \boxed{3r + s} = 5$$

$$6 - 4r - 1 + 4s + 12r + 4s = 5$$

$$8r + 8s = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = -r}$$

Elimination von s ergibt die **Schnittgerade g** :

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Kontrolle:

Liegt g in E_2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} ?$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} r + 3s + t = 0 & (1) \\ 4s + 2t = 0 & (2) \\ -2s - t = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) ist ein Vielfaches von (3) und daher überflüssig.

Setze $t = -2s$ in (1) ein: folgt: $r + 3s - 2s = 0 \Leftrightarrow r = -s$

Man erhält damit aus E_2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

und das ist die Schnittgerade g

- 4 Die Punkte $A(4|1|-1)$, $B(5|3|-2)$ und $C(6|5|2)$ legen eine weitere Ebene E fest. Gib eine Gleichung von E an.

1. Möglichkeit: Aufstellung einer Parametergleichung:

$$\bar{x} = \bar{a} + r \cdot \overline{AB} + s \cdot \overline{AC}: \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\bar{b}-\bar{a}} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\bar{c}-\bar{a}}$$

2. Möglichkeit: Berechnung eines Normalenvektors $\bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

(a) mit dem Skalarprodukt: $\overline{AB} \cdot \bar{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_1 + 2n_2 - n_3 = 0 \quad (1)$

$$\overline{AC} \cdot \bar{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2n_1 + 4n_2 + 3n_3 = 0 \quad (2)$$

$$(2) - 2 \cdot (1): \quad 5n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 0$$

$$\text{Wähle } n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = -2n_2 = -2$$

$$\text{Normalenvektor: } \bar{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) mit dem Kreuzprodukt: $\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ -1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{bzw. } \bar{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \underline{1} \quad \underline{2} \\ 2 \quad 4 \\ -1 \quad 3 \\ 1 \quad 2 \\ 2 \quad 4 \\ \underline{-1} \quad \underline{3} \end{array}$$

Damit erstellt man die Koordinatengleichung von E : $-2x + y = d$

Punktprobe mit $A(4|1|-1)$: $d = -2 \cdot \boxed{4} + \boxed{1} = -7$

Ebene E : $-2x + y = -7$ bzw. $2x - y = 7$

- 5 Bestimme die Schnittmenge M_t von E_t mit der Ebene E in Abhängigkeit von t .
Für welchen Wert von t ist M_t keine Gerade?

$$E_t: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ 4t + 8 \\ t^2 - 4t - 4 \end{pmatrix}$$

$$E: \quad 2x - y = 7$$

$$\text{Einsetzen:} \quad 2 \cdot [3 + r \cdot 2t + s \cdot (4t + 4)] - [-1 + s \cdot (4t + 8)] = 7$$

$$6 + r \cdot 4t + s \cdot 8t + 8s + 1 - s \cdot 4t - 8s = 7$$

$$r \cdot 4t + s \cdot 4t = 0$$

$$s = -r$$

$$\text{Damit erhält man die Schnittgerade:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ 4t + 8 \\ t^2 - 4t - 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2t - 4 \\ -4t - 8 \\ 2t + 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot (t + 2) \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass diese Punktmenge für $t = -2$ keine Gerade ist sondern nur der Punkt A!

6 Für welchen Wert von t liegt $P(-13 | -49 | 21)$ in der Ebene E_t ?

Methodische Überlegungen.

Man muss herausfinden, ob man den Vektor \overline{AP} aus den „Basisvektoren“ \vec{u} und \vec{v} der Ebene

kombinieren kann.

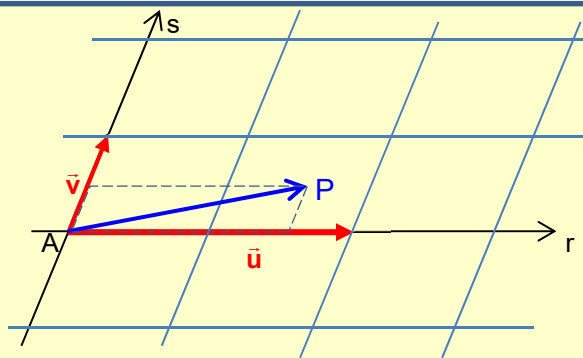
Wenn P in der Ebene liegt, gibt es eine

Linearkombination $\overline{AP} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.

Wenn P nicht in der Ebene liegt, sind die

Vektoren \overline{AP} , \vec{u} und \vec{v} linear unabhängig.

Dies weist man nach, wenn die Determinante $D = \begin{vmatrix} \overline{AP} & \vec{u} & \vec{v} \end{vmatrix} \neq 0$ ist.



Hier ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t-2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4t+4 \\ 4t+8 \\ t^2 - 4t - 4 \end{pmatrix}$ und $\overline{AP} = \begin{pmatrix} -13 \\ -49 \\ 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -48 \\ 32 \end{pmatrix} = 16 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnung der Determinante nach Sarrus:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4t+4 \\ -3 & 0 & 4t+8 \\ 2 & t-2 & t^2 - 4t - 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -Z2 \\ +Z1 \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 4t+8 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & t \end{array} = 2(4t+8) + 12t - 2t(4t+8) + 6t^2$$

$$D = 8t + 16 + 12t - 8t^2 - 16t + 6t^2 = -2t^2 + 4t + 16$$

Wann ist diese Determinante Null? $-2t^2 + 4t + 16 = 0 \quad | :(-2)$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Da E_2 eine Gerade ist und keine Ebene, scheidet dieser Wert aus.

Ergebnis: $P(-13 | -49 | 32)$ liegt in E_4 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ -4 \end{pmatrix}$

Nicht verlangt ist diese Kontrolle (für Ungläubige ☺):

Dazu verwende ich verkürzte Richtungsvektoren für E_4 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -13 \\ -49 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} r + 5s = -16 & (1) \\ 6s = -48 & (2) \\ r - s = 32 & (3) \end{cases}$$

Aus (2): $s = -8$

Aus (3): $r = 32 + s = 24$

Kontrolle in (1): $24 - 40 = -16$ Wahre Aussage.