Schulstunde

Klausur – Musterlösung
mit Schritt-für Schritt-Anleitung

Themenbereich
Ganzrationale Funktionen

EINE NACHHILFESTUNDE
FÜR MEHR VERSTÄNDNIS
VON GRUNDAUFGABEN BEI
GANZRATIONALEN FUNKTIONEN

Datei Nr. 42220

Stand 17. April 2024

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort – bitte lesen!

Ich spreche hier die Aufgaben einer Klausur über ganz rationale Funktionen im Stil einer Schulstunde durch, und du bist mein fiktiver Schüler, dem ich alles erkläre, dem ich Fragen stelle, die ich im nächsten Abschnitt beantworte, und der kleine Aufgaben bekommt. Dies soll bewirken, dass du nicht nur liest, was ich „gesagt" habe, sondert aktiv mitdenkst.

In der Mathematik gibt es ein **Geheimrezept**, das viele nicht vermitteln:

Jede Aufgabe hat ein Merkmal. Zu jedem Merkmal gehört eine Methode.

Wenn du Methodenwissen hast, liest du eine Aufgabe, erkennst das Merkmal und kannst dann die passende Methode aus dem Gedächtnis ziehen und loslegen. ***So geht Mathe!***

Ich habe diesen Text in 20 kleine Abschnitte eingeteilt, so dass ich von Abschnitt zu Abschnitt eine Art Zwiegespräch, Frage-Antwort-Spiel **mit dir** durchführen kann. In meinen Antworten und Hilfestellungen werde ich sehr oft auf eine Methode hinweisen oder einen kleinen Absatz mit dem Stichwort „WISSEN" aufschreiben. Dies sind die Grundlagen, damit man rechnen kann.

Warum mache ich das?

Ich habe etwa 40 Jahre lang Mathe unterrichtet und mir die Fähigkeiten zugelegt, die mich und meine Schüler zum Erfolg geführt haben. Du beschäftigst dich mit meinen Texten, weil du auch Hilfe benötigst und Erfolge suchst. Also überfliege nicht diese 20 Abschnitte, sondern denke intensiv mit. Löse die Aufgaben, die ich dir zwischendurch stelle schriftlich und bemühe dich. Dieses Denken und Vertiefen in die Materie bringt zehnmal mehr Erfolg als das bloße Durchlesen meiner Texte.

Die Aussage: „Ich habe es verstanden" reicht nicht!

Man muss den Stoff verarbeiten und dabei abspeichern. Dann erst bildet sich Wissen, vor allem Methodenwissen, und der Erfolg stellt sich ein.

Inhalt:

Nun geht die Schulstunde los:

Beginne auf Seite 5 mit Abschnitt 1 .

Übersicht: Die vier Aufgaben dieser Klausur,

Aufgabe 1 Ganzrationale Funktionenschar

Gegeben ist die Schar der Funktionen f_k mit $f_k(x) = x^3 - 6kx^2 + 9x$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Gib das Grenzwertverhalten der Funktionenschar für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an und beschreibe das (einfache) Symmetrieverhalten der Funktionenschar in Abhängigkeit von k.

b) Bestimme die Wendestellen der Funktionenschar f_k.
Treffe auch Aussagen über die Art der Wendestellen.

c) Sei nun k = 1.
   i. Bestimme die Extrempunkte der Funktion f_1.
   ii. Skizziere den Graphen der Funktion f_1.

Aufgabe 2 Tangentenaufgabe

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f und ein Punkt $P(u \mid f(u))$ mit $u \in \mathbb{D}_f$.

a) Zeige, dass die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P lautet:

$$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

b) Gib in analoger Darstellung eine Gleichung für die Normale in P an.

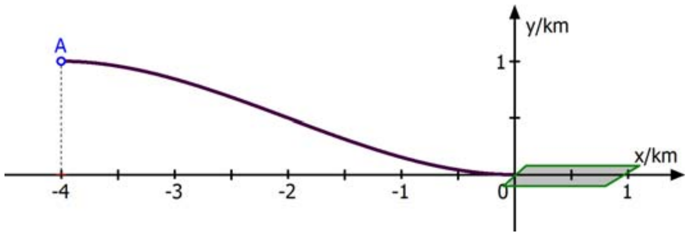
c) Gegeben ist die Funktion f mit $\mathbf{f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2}$.

Bestimme die Punkte des Graphen, deren Tangenten durch den Punkt $A(0 \mid 6)$ verlaufen.

Aufgabe 3 Steckbriefaufgabe

Ein Flugzeug nähert sich im horizontalen Flug dem Punkt $A(-4\,|\,1)$.

Dort beginnt der Pilot mit einem Sinkflug, der auf der Landebahn im Punkt $B(0\,|\,0)$ endet.



a) Die Flugbahn lässt sich mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modellieren. Zeige mit Hilfe einer Funktionsbestimmung. dass sich die Flugkurve durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{32} \cdot \left(x^3 + 6x^2\right)$$

beschreiben lässt.

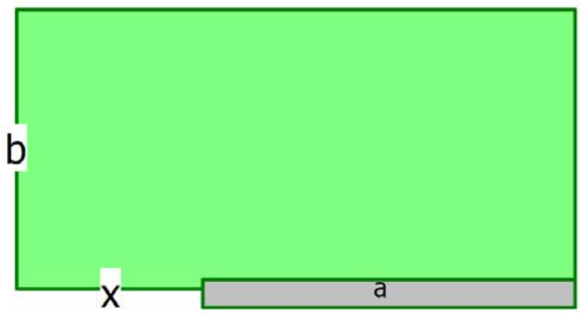
b) Bestimme die Stelle, an der die Flugbahn am steilsten abfällt.

c) Bestimme den Abstiegswinkel an der Stelle x = -2.

Aufgabe 4 Extremwertaufgabe

Landwirt will mit einer Rolle mit 100 m Maschendraht ein rechteckiges Grundstück einzäunen. Dabei will er eine vorhandene Mauer der Länge a = 40 m als Abgrenzung mitbenutzen.

Welche Abmessungen muss er wählen, damit die eingegrenzte Fläche maximal wird.



a) Zeige, dass die Zielfunktion $f(x) = -x^2 - 10x + 1200$ ist.

b) Gib eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ für das Problem an.

c) Löse die Extremwertaufgabe.

Lösung Aufgabe 1

1 Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x^3 - 6kx^2 + 9x$ und $k \in \mathbb{R}$.

a) Gib das Grenzwertverhalten der Funktionenschar für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an.

Methode: Man klammert die höchste x-Potenz aus, also x^3: $f_k(x) = x^3 \underbrace{\left(1 - \frac{6k}{x} + \frac{9}{x^2}\right)}_{\to 1}$

Denn es ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6k}{x} = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9}{x^2} = 0$.

Daher folgt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{6k}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = 1$.

Daher verhält sich $f_k(x)$ für $x \to \pm\infty$ wie die Funktion $g(x) = x^3$.

Ergebnis: Für $x \to \infty$ geht $f_k(x) \to \infty$ und für $x \to -\infty$ gilt $f_k(x) \to -\infty$.

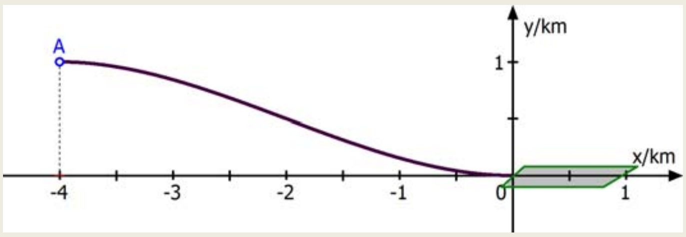
AUFGABE: Beschreibe das (einfache) Symmetrieverhalten der Funktionenschar zunächst für k = 0, und dann für beliebiges k. → 2

11

Lösung Aufgabe 3

Ein Flugzeug nähert sich im horizontalen Flug dem Punkt $A(-4\,|\,1)$.

Dort beginnt der Pilot mit einem Sinkflug, der auf der Landebahn im Punkt $B(0\,|\,0)$ endet.



a) Die Flugbahn lässt sich mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modellieren. Zeige mit Hilfe einer Funktionsbestimmung. dass sich die Flugkurve durch die Funktion

$$f(x) = \tfrac{1}{32} \cdot \left(x^3 + 6x^2\right)$$

beschreiben lässt.

b) Bestimme die Stelle, an der die Flugbahn am steilsten abfällt.

c) Bestimme den Abstiegswinkel an der Stelle x = -2.

Eine Funktion 3. Grades hat allgemein diese Gleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Zur Bestimmung der vier unbekannten Koeffizienten benötigt man vier Bedingungen, die man aus der Abbildung ablesen kann.

Schreibe sie bitte auf. ⇒ 12

$\boxed{2}$ Für k = 0 haben wir die Funktion $f_0(x) = x^3 + 9x$.

Wissen: Da f_o nur ungerade Exponenten hat, ist ihr Schaubild punktsymmetrisch zum Ursprung:

Das beweist man so: $\boxed{f_0(-x)} = (-x)^3 + 9 \cdot (-x) = -x^3 - 9x = -(x^3 + 9x) = \boxed{-f_o(x)}$

Und das ist das Merkmal für Punktsymmetrie zum Ursprung.

Wissen: **Ganz allgemein gilt:**
Das Schaubild jeder ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt.

Das gilt dann für alle Kurven dieser Schar.

Die nächste Aufgabe: b) Bestimme die Wendestellen der Funktionenschar f_k. $\Rightarrow$ $\boxed{3}$

$\boxed{12}$

Bedingungen für die Flugkurve K.

1. K geht durch den Ursprung.
2. K geht durch den Punkt $A(-4 \mid 1)$.
3. K hat eine waagrechte Tangente in A.
4. K hat eine waagrechte Tangente im Ursprung.

Daraus ergeben sich Bedingungen für die Funktion f:

1. $f(0) = 0$
2. $f(-4) = 1$
3. $f'(-4) = 0$
4. $f'(0) = 0$.

Dies wandelt man nun in Gleichungen um mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$:

1. $d = 0$
2. $-64a + 16b - 4c + d = 1$
3. $48a - 8b + c = 0$
4. $c = 0$

Berechne nun aus diesen 4 Gleichungen a, b, c und d. $\Rightarrow$ $\boxed{13}$

$\boxed{3}$ **In einem Wendepunkt ändert die Kurve ihre Krümmung.**

Methode: An einer Wendestelle ändert daher die zweite Ableitung ihr Vorzeichen.
Wenn also $f_k''(x_W) = 0$ ist und $f_k'''(x_W) \neq 0$, dann ist x_W eine Wendestelle.

Ableitungen: $f_k(x) = x^3 - 6kx^2 + 9x$ $\quad f_k'(x) = 3x^2 - 12kx + 9$

$f_k''(x) = 6x - 12k$

$f_k'''(x) = 6$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12k = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_W = 2k}$

Hinreichende Bedingung: $f_k'''(x) \neq 0$ ist erfüllt.

Ergebnis: Die Wendestelle der Funktion f_k ist $x_W = 2k$.

Nicht verlangt war die y-Koordinate des Wendepunkts: Man berechnet sie so:

$$y_W = f_k(2k) = (2k)^3 - 6k \cdot (2k)^2 + 9 \cdot 2k = 8k^3 - 24k^3 + 18k = -16k^3 + 18k.$$

Dann lautet der Wendepunkt: $W\left(2k \mid -16k^3 + 18k\right)$

Aufgabe: Treffe auch Aussagen über die Art der Wendestellen. $\rightarrow \boxed{4}$

$\boxed{13}$ **Berechnung von a, b, c und d:**

Setzt man $c = 0$ und $d = 0$ in die 2. Gleichung ein, folgt: $-64a + 16b = 1$ (1)

Und aus der 3. Gleichung folgt: $48a - 8b = 0$ (2).

Damit man durch Addition b eliminieren kann, verdoppelt man (2): $96a - 16b = 0$ (3)

(1) + (3): $32a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{32}}$

(2) nach b umstellen: $b = 6a$

a einsetzen: $b = 6 \cdot \frac{1}{32}$

Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + 6 \cdot \frac{1}{32}x^2$ oder $f(x) = \frac{1}{32}\left(x^3 + 6x^2\right)$.

b) Wo fällt die Flugbahn am steilsten ab?

WISSEN: In Wendepunkten ist die Steigung ein Maximum oder Minimum.

Berechne bitte den Wendepunkt! $\Rightarrow \boxed{14}$

$\boxed{4}$ Die Art der Wendestellen ist gefragt.

WISSEN:

Wenn $f'''(x_W) > 0$ ist, wechselt f'' das Vorzeichen von Minus nach Plus. Das bedeutet:
Die Krümmung wechselt von Rechtskrümmung nach Linkskrümmung.
Ist aber $f'''(x_W) < 0$, dann ist es umgekehrt.

Hier ist $f_k'''(x) = 6$, also wechselt bei allen Funktionen f_k die Krümmung von rechts nach links.

Berechne nun die Extrempunkte von f_1. $\Rightarrow$ $\boxed{5}$

$\boxed{14}$ **Berechnung der Wendepunkte.**

Methode:

Wenn $f_k''(x_W) = 0$ ist, dann könnte x_W eine Wendestelle sein !

Damit dies der Fall ist, muss $f'''(x_W) \neq 0$ sein.

Mit der notwendigen Bedingung findet man mögliche Wendestellen.
Mit der hinreichenden Bedingung überprüft man, ob es Wendestellen sind.

Hier: $f(x) = \frac{1}{32}\left(x^3 + 6x^2\right)$

$f'(x) = \frac{1}{32}\left(3x^2 + 12x\right)$

$f''(x) = \frac{1}{32}(6x + 12)$

$f'''(x) = \frac{1}{32} \cdot 6 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = -2$

Hinreichende Bedingung: $f''(-2) \neq 0$ ist erfüllt.

y-Koordinate: $f(-2) = \frac{1}{32} \cdot (-8 + 24) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

Ergebnis: Wendepunkt: $W\left(-2 \mid \frac{1}{2}\right)$.

Steigung in W: $f'(-2) = \frac{1}{32}(12 - 24) = -\frac{12}{32} = -\frac{3}{8} < 0$

d. h. die Kurve fällt in W.

Nächste Aufgabe:

c) Bestimme den Abstiegswinkel an der Stelle x = -2. $\Rightarrow$ $\boxed{15}$

$\boxed{5}$ **Es geht jetzt um die Funktion** $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Methode:

In einem Extrempunkt hat die Kurve eine waagrechte Tangente.
Wenn also $f_k'(x_E) = 0$ ist, dann hat der Graph an der Stelle x_E
eine waagrechte Tangente. Das könnte x_E eine Extremstelle sein !

Mit der notwendigen Bedingung findet man Stellen mit waagrechter Tangente.
Mit der hinreichenden Bedingung überprüft man, ob es Extremstellen sind.

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad |:3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

Lösungsformel: $x_E = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Also hat der Graph bei 1 und 3 eine waagrechte Tangente,

Hinreichende Bedingung mit $f_1''(x) = 6x - 12$ $\quad f_1''(1) = 6 - 12 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f_1''(3) = 18 - 12 > 0 \Rightarrow$ Minimum

Jetzt erst weiß man dass es Extremstellen sind!

y-Koordinaten: $f_1(1)) = 1 - 6 + 9 = 4$ und $f_1(3) = 27 - 54 + 27 = 0$

Ergebnis: Hochpunkt ist $H(1|4)$, Tiefpunkt ist $T(3|0)$.

Skizziere nun den Graphen von f_1. $\Rightarrow \boxed{6}$

Berechne dazu noch die Schnittpunkte mit der x-Achse.

$\boxed{15}$ **WISSEN: Die Steigung ist der Tangens des Steigungswinkels.**

Also gilt: $\tan\alpha = f'(-2) = -\frac{3}{8}$ Also folgt: $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{8}\right) \approx -20{,}556^{\circ}$

Das Minuszeichen sagt uns, dass der Winkel im Uhrzeigersinn
gegen die x-Richtung orientiert ist, also ein Abstiegswinkel ist.
Seine Größe ist etwa $20{,}6^{\circ}$.

In $\Rightarrow \boxed{16}$ folgt Aufgabe 4.

$\boxed{6}$ Nullstellen von f_1: $f_1(x)=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x=0$

Methode:

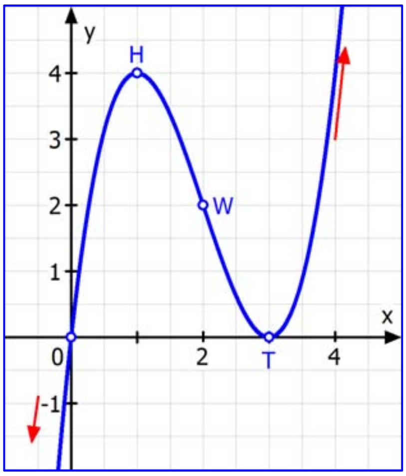
x ausklammern: $x\cdot\left(x^2-6x+9\right)=0$ (*)

Ein Nullprodukt wird Null, wenn einer der Faktoren Null wird:

1. Faktor: $x_1=0$

2. Faktor: $x^2-6x+9=0 \Rightarrow x_{2,3}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$.

Hinweis: 3 ist als doppelte Nullstelle auch eine Berührstelle, was wir ja schon wissen, da bei x = 3 ein Tiefpunkt liegt.



Wissen: Wenn man erkennt, dass $x^2-6x+9=(x-3)^2$

ist, kann man Gleichung (*) so schreiben: $x\cdot(x-3)^2=0$

und kann sofort die Nullstellen 0 und 3 ablesen.

Für die Skizze zeichnet man die Extrempunkte, den Wendepunkt und die Schnittpunkte mit der x-Achse ein. Außerdem kennt man den Verlauf für $x\to\pm\infty$ (rote Pfeile). Dann verbindet man diese Punkte und achtet darauf, dass der Graph in H und T nicht spitz sondern rund verläuft.

Nun folgt Aufgabe 2 $\Rightarrow$ $\boxed{7}$

$\boxed{16}$

Lösung Aufgabe 4

Ein Landwirt will mit einer Rolle mit 100 m Maschendraht ein rechteckiges Grundstück einzäunen. Dabei will er eine vorhandene Mauer der Länge a = 40 m als Abgrenzung mitbenutzen. Welche Abmessungen muss er wählen, damit die eingegrenzte Fläche maximal wird.

a) Zeige, dass die Zielfunktion $f(x)=-x^2-10x+1200$ ist.

b) Gib eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ für das Problem an.

c) Löse die Extremwertaufgabe.

Die Zielfunktion stellt den Flächeninhalt des Grundstücks dar. Löse a). $\Rightarrow$ $\boxed{17}$

$\boxed{7}$

Lösung Aufgabe 2

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f und ein Punkt $P(u \mid f(u))$ mit $u \in \mathbb{D}_f$.

a) Zeige, dass die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P lautet:

$$\mathbf{t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)}$$

b) Gib in analoger Darstellung eine Gleichung für die Normale in P an.

c) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$.

Bestimme die Punkte des Graphen, deren Tangenten durch den Punkt $A(0 \mid 6)$ verlaufen.

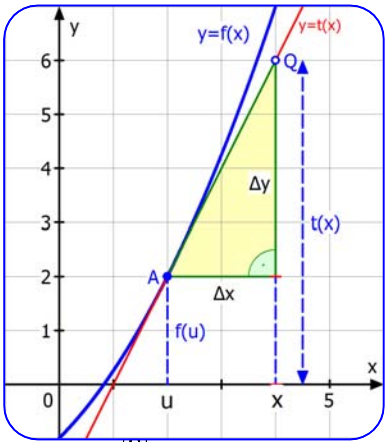
Für die Lösung benötigen wir dieses **Wissen über Tangenten:**
Die Steigung einer Tangente an der Stelle u kann mit der 1. Ableitung berechnet werden: $m = f'(u)$. Andererseits kann man diese Steigung auch aus dem Berührpunkt $A(u \mid f(u))$ und einem beliebigen *Tangentenpunkt* $Q(x \mid t(x))$ mit der Formel $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen:

$$m = \frac{t(x) - f(u)}{x - u}.$$

Daraus folgt:

$t(x)) - f(u) = f'(u) \cdot (x - u)$ (genannt Punkt-Steigungs-Form)

oder wie gesucht als Tangentenfunktion: $t(x)) - f(u) = f'(u) \cdot (x - u)$



⇒ $\boxed{8}$

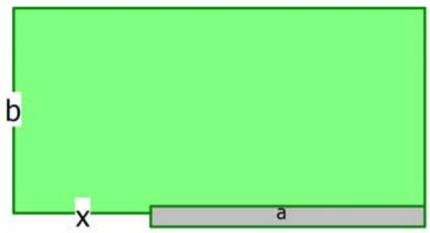
$\boxed{17}$

Länge der Mauer: a = 40

Länge des Rechtecks: $(x + a) = (x + 40)$

Breite: b

Flächeninhalt: $\mathbf{f(x) = (x + 40) \cdot b}$



Diese Zielfunktion hat zwei Unbekannte: x und b.

Daher benötigt man eine Zusatzbedingung: $x + b + (x + 40) + b = 100$ (Zaunlänge).

d. h. $2x + 2b = 60$ also $\mathbf{b = 30 - x}$.

Damit kann man b eliminieren und erhält:

$$f(x) = (x + 40) \cdot (30 - x)$$

Ergebnis: Die Zielfunktion ist $\mathbf{f(x) = -x^2 - 10x + 1200}$.

Welche Zahlen sind für x möglich, damit eine Umzäunung eines Grundstücks mit 100 m Zaun möglich wird? (Bestimme also den Definitionsbereich)

⇒ $\boxed{18}$

$\boxed{8}$ **Methode:** Mit der Punkt-Steigungs-Form $t(x)) - f(u) = m \cdot (x-u)$ kann man eine Gleichung einer Geraden aufstellen, vor der man einen Punkt $P(u \mid f(u))$ und ihre Steigung m kennt. Ist speziell die Gleichung der Normalen in P gesucht, dann braucht man nur noch deren Steigung.

Wissen: Da die Normale senkrecht auf der Tangente steht, ist ihre Steigung der negative Kehrwert der Tangentensteigung: $m_N = -\frac{1}{m_T}$.

Für die Tangentensteigung gilt $m_T = f'(u)$.

Daher lautet die Normalensteigung $\boxed{m_N = -\frac{1}{f'(u)}}$

Setzt man das in die Punkt-Steigungsform ein, erhält man $n(x) - f(u) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u)$

und daraus die Normalenfunktion: $n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$

Aufgabenteil c) $\Rightarrow$ $\boxed{9}$

$\boxed{18}$ *Es ist nützlich, wenn man sich einige Zahlen* *<u>als Beispiel</u> vornimmt, damit man eine Vorstellung bekommt.*

Wir verwenden $f(x) = -x^2 - 10x + 1200$ und $\mathbf{b = 30 - x}$

Wenn x = 20 m ist, dann folgt $f(20) = -400 - 200 + 1200 = 600 \ (m^2)$

Dabei ist dann $b = 30 - 20 = 10 \ (m)$.

Die Länge des Grundstücks ist dann $L = x + a = 20 + 40 = 60 \ (m)$

Und es wurden $x + b + x + a + b = 2x + 2b + a = 40 + 20 + 40 = 100 \ (m)$ Draht verbraucht.

Wenn x = 40 m ist, dann folgt $f(40) = -1600 - 400 + 1200 = -800 \ (m^2)$.

40 gehört also nicht zum Definitionsbereich der Aufgabe.

Man erkennt, die Bedingung ist: $f(x) > 0$ Bestimme die Lösungsmenge. $\Rightarrow$ $\boxed{19}$

$\boxed{9}$ c) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$.

Bestimme die Punkte des Graphen, deren Tangenten durch den Punkt $A(0 \mid 6)$ verlaufen.

Methode: **Das Merkmal dieser Aufgabe heißt „Tangente".**

In Teil a) wurde die **Punkt-Steigungs-Form gezeigt**, mit der man eine Tangentengleichung aufstellen kann. **Sie hat zwei Anwendungsmöglichkeiten, je nachdem, was gegeben ist.**

$$\underbrace{y}_{y_Q} = f'(u) \cdot \left(\underbrace{x}_{x_Q} - \overset{x_A}{\overbrace{u}} \right) + \overset{y_A}{\overbrace{f(u)}}$$

Tangentenpunkt $Q(x \mid y) \rightarrow$ $\leftarrow$ Berührpunkt $A(u \mid f(u))$ (PSF)

(1) Gibt man den Berührpunkt $A(u \mid f(u))$ ein, erhält man die Tangentengleichung mit der man beliebige Punkte $Q(x_Q \mid y_Q)$ der Tangente berechnen kann: Zu x_Q folgt dann y_Q....

(2) Gibt man einen Punkt $Q(x_Q \mid y_Q)$ der Tangente ein, kann man den Berührpunkt A berechnen.

In diesem Aufgabenteil ist die Option (2) verlangt.

Gegeben ist $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$ mit $f'(x) = -x$. Wir suchen den Berührpunkt $A\left(u \mid 4 - \frac{1}{2}u^2\right)$.

In ihm hat die Tangente die Steigung $m = f'(u) = -u$.

Die Tangente soll durch $Q(0 \mid 6)$ gehen:

Setze das nun in die PSF ein. $\Rightarrow$ $\boxed{10}$

$\boxed{19}$ Die Quadratische Ungleichung $f(x) > 0 \iff -x^2 - 10x + 1200 > 0$

löse ich mit der **Parabelmethode**.

Methode: Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel.
f hat daher positive Werte, wenn x eine Zahl <u>zwischen</u> den Nullstellen ist.

Nullstellenbedingung: $f(x) = 0 \iff -x^2 - 10x + 1200 = 0 \quad | \cdot(-1)$

$$x^2 + 10x - 1200 = 0$$

Lösungsformel $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 1200}}{2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{4900}}{2} = \dfrac{-10 \pm 70}{2} = \begin{cases} 30 \\ -40 \end{cases}$

Da negative x-Werte hier nicht möglich sind, bleibt übrig: $0 \le x < 30$ m also $\mathbb{D}_f = [0\,;30\,[$.

Hinweis: Für $x = 0$ wird das Grundstück auf der einen Seite nur von der Mauer begrenzt.

Dann folgt für die Breite $b = 30 - 0 = 30(m)$

Und für den Flächeninhalt: $f(0) = 12.00\ (m^2)$.

c) Löse nun die Extremwertaufgabe.

Das bedeutet: Berechne den Parabelscheitel (Hochpunkt). $\Rightarrow$ $\boxed{20}$

$\boxed{10}$ Punkt-Steigungsform: $\mathbf{y = f'(u)\cdot(x - u) + f(u)}$

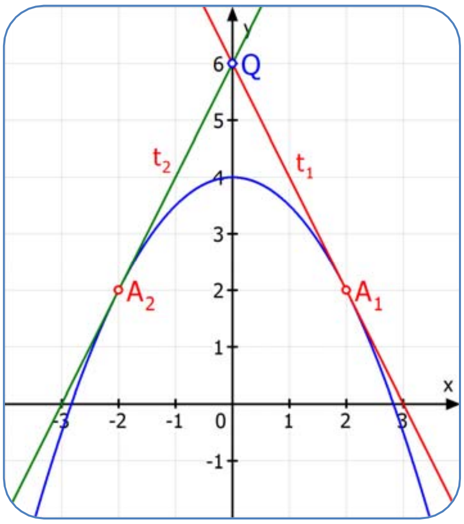
$A(0\,|\,6)$ liegt auf t: $\boxed{6} = -u\cdot\left(\boxed{0} - u\right) + \left(4 - \tfrac{1}{2}u^2\right)$ $A\left(u\,|\,4 - \tfrac{1}{2}u^2\right)$ ist gesucht.

$$6 = u^2 + 4 - \tfrac{1}{2}u^2$$

$$2 = \tfrac{1}{2}u^2$$

$$u^2 = 4 \quad\Rightarrow\quad u_{1,2} = \pm 2\,.$$

y-Koordinaten: $f(\pm 2) = 4 - \tfrac{1}{2}\cdot 4 = 2\,.$



Ergebnis: Es gibt zwei Tangenten von A an die Parabel:
Ihre Berührpunkte sind $A_1(2\,|\,2)$ und $A_2(-2\,|\,2)$.

Anmerkung:
Nicht gefragt waren die Gleichungen der Tangenten.
Ihre Steigungen sind $f'(2) = -2$ und $f'(-2) = 2$.

Außerdem ist $A(0\,|\,6)$ ihr y-Achsenabschnitt, also kann man die Gleichungen sofort anschreiben: t_1: $y = -2x + 6$ und t_2: $y = 2x + 6$.

Weiter geht es mit Aufgabe 3 auf Seite 5 in Abschnitt $\Rightarrow$ $\boxed{11}$

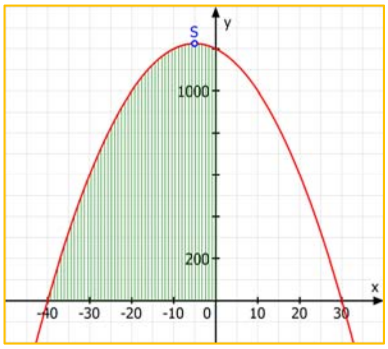
$\boxed{20}$ Zuerst zwei Ableitungen: $f(x) = -x^2 - 10x + 1200$

$f'(x) = -2x - 10$ $\qquad f''(x) = -2$

Notwendige Bedingung: für Extremwerte: $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x - 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_E = -5$

Überraschung: $x_E = -5 \notin \mathbb{D}_f$!!!

Also muss der Extremwert am Definitionsrand x = 0 liegen.
Das erkennt man auch, wenn man den Graph von f zeichnet:
Da die Parabel nach unten geöffnet ist, ist der Scheitel bei -5 ein Hochpunkt. Also fällt der Graph in $\mathbb{D}_f = [0;30[$ streng monoton.
Also liegt bei x = 0 ein Maximum vor (Randextremwert).



Ergebnis: Das Maximum entsteht für x = 0 und der maximale Grundstücksinhalt beträgt dann 1200 m^2.

Die Abmessungen sind dann

x = 0 m, Breite b = 30 m und Länge a = 40 m.

Wir sind fertig! CIAO !