Keine Ahnung von Trigonometrie

Teil 3

Wie geht

Trigonometrie

im beliebigen Dreieck

???

Sinussatz und Kosinussatz

Datei Nr. 16017

24. November 2022

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Viele meiner Texte sind so geschrieben, wie man auch im Unterricht vorgeht: Ein Thema wird mit Beispielen eingeführt, dann wird noch etwas gefolgert und bewiesen, und dann beginnt die Übungsphase.

Mit diesem Text wende ich mich an Personen (meistens werden es Schüler sein), die von Trigonometrie keine Ahnung (mehr) haben und rasch erfahren möchten, was man damit wie anfängt. Wer also „Keine Ahnung von Trigonometrie" hat, ist hier richtig.

Ich erzähle wie man bestimmte Aufgaben löst und was man dabei zu tun hat. Auf die Frage „warum?" gibt es hier wenig Antworten. Dazu sollte man dann den Text 16001 studieren. Dort steht das alles auf etwas höherem Niveau, mit Hintergrundwissen.

Weitere Texte:

16015 Keine Ahnung von Trigonometrie 1: Rechtwinklige Dreiecke

16016 Keine Ahnung von Trigonometrie 2: gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

16025 Beweis von Sinussatz und Kosinussatz und Musterbeispiele

Inhalt

1 Was du für diesen Text wissen solltest:

Du hast dir sicher gemerkt, dass man sin, cos und tan nur im rechtwinkligen Dreieck verwenden kann. Das stimmt jedoch nur teilweise. Die mathematischen Tüftler haben sich Methoden überlegt, wie man in nicht rechtwinkligen Dreiecken dennoch etwas mit sin und cos unternehmen kann.
Darum geht es in diesem Text!

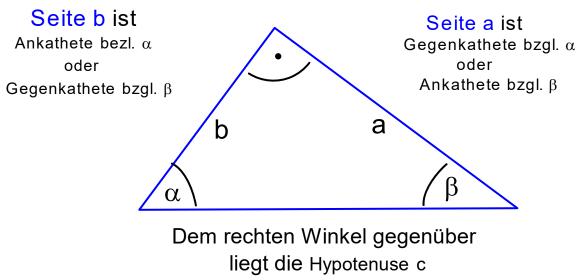
Hier nochmals zur Erinnerung:

Trigonometrische-Fakten im rechtwinkligen Dreieck

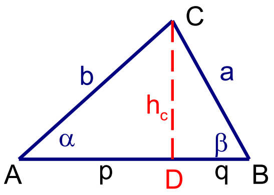
1. Das Seitenverhältnis „Gegenkathete durch Hypotenuse“ nennt man den **Sinus** Winkels.
2. Das Seitenverhältnis „Ankathete durch Hypotenuse“ nennt man den **Kosinus** des Winkels.
3. Das Seitenverhältnis „Gegenkathete durch Ankathete“ nennt man den **Tangens** des Winkels.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Dabei gilt:



2 Der Sinussatz



Zu Beginn eine Denkübung für die Hirnwindungen.

Beispiel zum Erwärmen:

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Die Höhe zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke. Berechne aus jedem der beiden Teildreiecke die Höhe h_c mit Hilfe von Sinus und vergleiche die beiden Ergebnisse in einer Formel.

Im Teildreieck ADC gilt: $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$ (1)

Im Teildreieck DBC gilt: $\sin\beta = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a \cdot \sin\beta$ (2)

Vergleichen liefert $\boxed{b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta}$ (3)

Die Gleichung (3) gilt in einem beliebigen, nicht rechtwinkligen Dreieck:
Sie enthält zwei Seiten und ihre Gegenwinkel. Also merke dir bitte:

Kennen wir eine Seite und deren Gegenwinkel, können wir
- zu einer zweiten Seite deren Gegenwinkel berechnen oder
- zu einem zweiten Winkel dessen Gegenseite berechnen.

Gegeben $\boxed{a \text{ und } \alpha}$ und b, dann kannst du

β berechnen aus $\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}}$ (1a) $\Rightarrow \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \ldots \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{b \cdot \sin\alpha}{a}\right)$

Gegeben $\boxed{a \text{ und } \alpha}$ und β, dann kannst du

b berechnen aus $\boxed{\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}}$ (1b) $\Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \ldots$

Andere Kombinationen gehen analog dazu.

Man kann diese Formeln auch anders anordnen

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$ (1) $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$ (2) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$ (3) $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b}$ (4) $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$ (5) $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$

Und diese Formeln kann man alle noch „auf den Kopf stellen".

MERKREGEL für diesen Sinussatz:

1. Gleichungsform: Auf jeder Seite steht ein Bruch $\frac{\text{Sinus Winkel}}{\text{Gegenseite}}$

Oder wenn die Seite gesucht ist: $\frac{\text{Gegenseite}}{\text{Sinus Winkel}}$

2. Gleichungsform: $\frac{\text{Sinus 1.Winkel}}{\text{Sinus 2.Winkel}} = \frac{\text{1.Seite}}{\text{2.Seite}}$

Tipp: Links oben in der Bruchgleichung sollte die gesuchte Größe stehen!!!

Anwendungsbeispiele:

a) Gegeben seien b, $\boxed{\text{a und } \alpha}$. Dazu lässt sich β berechnen:

Dann schreibt man den Sinussatz so an: $\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \Rightarrow \beta = ...}$

oder so: $\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \Rightarrow \beta = ...}$

Diese beiden verschiedenen Ansatzmöglichkeiten sind immer gegeben.
Ich werde in der Regel nur einen Ansatz zeigen.
Auf jeden Fall beginnt man links oben in der Gleichung mit $\sin\beta$, wenn β gesucht ist.

b) Gegeben seien β, $\boxed{\text{a und } \alpha}$. Dazu lässt sich b berechnen:

Dann schreibt man den Sinussatz so an: $\boxed{\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = ...}$

oder so: $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = ...}$

c) Gegeben seien $\boxed{\text{b und } \beta}$ und c. Dazu lässt sich γ berechnen:

Dann schreibt man den Sinussatz so an: $\boxed{\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} \Rightarrow \gamma = ...}$

d) Gegeben seien $\boxed{\text{b und } \beta}$ und α. Dazu lässt sich a berechnen:

Dann schreibt man den Sinussatz so an: $\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = ...}$

Usw.

Jetzt folgen einige Rechenbeispiele mit Zahlen und Taschenrechnereinsatz.

Dabei müssen wir auch ein Problem lösen:

Berechnet man deinen Winkel aus seinem Sinuswert, dann ist das nicht eindeutig,

Wenn etwa $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ}{5} = 0{,}4$ ist, dann gibt es zwei Winkel, die dazu

passen: $\beta = \sin^{-1}(0{,}4) \approx \begin{cases} 23{,}6 \\ 180^\circ - 23{,}6^\circ = 156.4^\circ \end{cases}$

In manchen Aufgabe führt das dann zu zwei Dreieckslösungen, in anderen nicht.

….

Rechenbeispiel 1

Gegeben sind <u>zwei Seiten</u> a = 6 cm, b = 7 cm <u>und der Gegenwinkel</u> $\beta = 70^O$ zu b.

Methode: Gegeben ist das Paar $\boxed{\text{b und } \sin\beta \text{ sowie eine weitere Seite a.}}$

Also kann man zu a den Gegenwinkel berechnen, also α !!!

Hast du dir gemerkt, dass man den hier anzuwendenden Sinussatz auf zwei Arten schreiben kann?

1. Möglichkeit: (Links das Verhältnis der Sinusse, rechts das Seitenverhältnis)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \sin^{-1}\frac{a\cdot\sin\beta}{b} = ...$$

```
sin⁻¹ 6×sin 70
        7
          53.65
```

2. Möglichkeit: (Links das Paar a, α und rechts das Paar b,β)

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \sin^{-1}\frac{a\cdot\sin\beta}{b} = ...$$

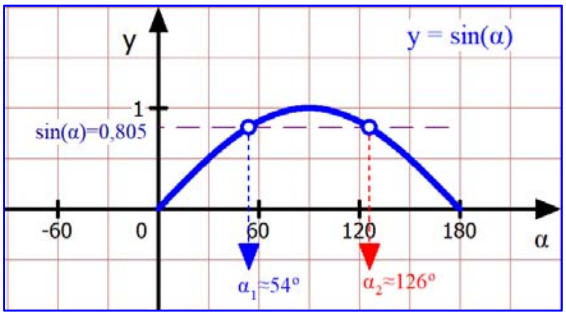
An dieser Stelle unterbreche ich die Rechnung für eine sehr wichtige Überlegung:

Im Bereich zwischen 0^0 und 180^o hat die Gleichung

$\sin\alpha = 0{,}805$ zwei Lösungen gibt: $\alpha_1 = 53{,}65^o$ und

$\alpha_2 = 180^O - \alpha_1 = 126{,}35^o$

Wie passt dies in die Geometrie?



Hier hilft uns eine <u>Konstruktion</u> dieses Dreiecks:

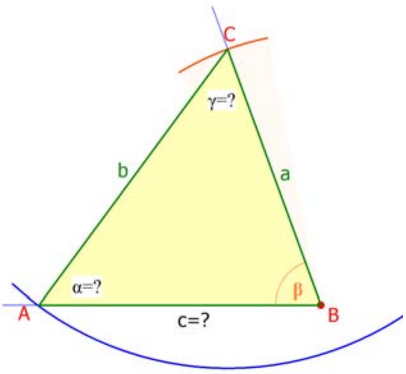
Zeichne den Winkel β.

Trage auf einem Schenkel von β die Strecke a = BC ab.

Das ergibt den Eckpunkt C.

Zeichne einen Kreisbogen um C mit Radius b.

Dieser schneidet den freien Schenkel von β in A.



Es gibt also doch eine <u>eindeutige</u> Lösung, denn β liegt der

größeren Seite gegenüber (Weil b > a schneidet der Kreis um C)

die Halbgerade BA nur einmal.).. Im Falle SSW_g ist die Lösung eindeutig.

Nun berechne ich den dritten Winkel:

Ausgehend von α_1 = 63,65° folgt $\gamma = 180^o - \beta - \alpha_1 = 180^o - 70^o - 53{,}65^o = 56{,}35^o$

Ausgehend von α_2 = 126,65° folgt $\gamma = 180^o - \beta - \alpha_1 = 180^o - 70^o - 126{,}35^o = -16{,}35^o < 0$

<u>Also gibt es kein solches Dreieck</u> mit a = 6 cm, b = 7 cm, $\beta = 70^O$ und **α_2 = 126,65° .**

Du bist noch nicht fertig! Es fehlt noch c.

Methode zur Berechnung von c:

Damit man c mit dem Sinussatz berechnen kann, braucht man seinen Gegenwinkel γ und ein weiteres Paar Seite-Gegenwinkel. Und genau das haben wir:

Ich beginne die Sinussatz-Formel mit der Größe, die gesucht ist, also mit c.

$$\boxed{\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}}$$

So ist für die meisten das Umstellen der Formel nach c einfacher !

Der Taschenrechner liefert damit $c \approx 6{,}20$ cm.

$$\boxed{\frac{7 \times \sin 56.35}{\sin 70} \quad 6.20}$$

Rechenbeispiel 2

Gegeben sind $c = 11\,\text{cm}$; $\alpha = 35^O$ und $\gamma = 75^O$

Zuerst sollte man nachdenken, ob der Sinussatz anwendbar ist!

Methode: Gegeben ist das Paar $\boxed{c \text{ und } \gamma}$, d. h. Seite/Gegenwinkel.

Damit kann man zu α die Gegenseite a berechnen:

Sinussatz: $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$ oder $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$

Egal, wie man vorgeht, günstig ist es, wenn man mit der gesuchten Größe beginnt, also hier mit a.

Taschenrechner:
Hier wurde auch gleich $\beta = 70^O$ berechnet.

```
11×sin 35
 sin 75
              6.531910244
180−35−75
                       70
```

Nun die Berechnung von b. Nachdem wir den Gegenwinkel kennen, ist das kein Problem:

Sinussatz für b: $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$ oder $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

$b \approx 10{,}7\,\text{cm}$

```
11×sin 70
 sin 75
          10.701
```

Zusammenfassung:

MERKE: **Der Sinussatz ist immer dann anwendbar, wenn eine Seite und ihr Gegenwinkel gegeben sind.**

Dann kann man zu jeder weiteren Seite deren Gegenwinkel oder zu jedem weiteren Winkel dessen Gegenseite berechnen.

Es gibt also zwei Fälle:

(1) Gegeben sind 2 Winkel und eine Gegenseite
(2) Gegeben sind 2 Seiten und ein Gegenwinkel.

Man kürzt diese Fälle mit WWS und SSW ab.

Achtung Gefahrenzone:

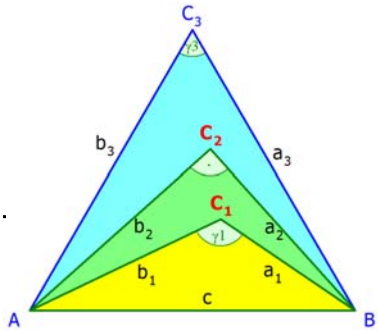
Im Fall SSW gibt es

- Aufgaben, die nicht lösbar sind, und
- Aufgaben mit zwei Lösungen.

Wie man damit umgeht, wird im Abschnitt 4 (Seite 10) behandelt.

Du musst dich dann warm anziehen .....

3 Der Kosinussatz



Wir betrachten mein Dreiecks-Kunstwerk mit griechischen Augen indem wir uns fragen: Was würde Pythagoras zu diesem Gebilde sagen?

Er würde vielleicht sagen: Wenigstens eines der Dreiecke ist rechtwinklig.

Und er würde uns sofort sagen:

Im Dreieck ABC_2 gilt: $c^2 = a_2{}^2 + b_2{}^2$ (2)

Wir fragen zurück: Was ist dann mit Dreieck ABC_1 los? Das ist ja nicht rechtwinklig!

Seine Antwort wäre vielleicht: Weil $\gamma_1 > 90^O$ ist, wurden die Seiten a_1 und b_1 kleiner als im 2. Dreieck, also gilt hier $c^2 > a_2{}^2 + b_2{}^2$ (1)

Nächste Frage: Wie verhält es sich mit Dreieck ABC_3? Das ist auch nicht rechtwinklig!

Seine Antwort wäre vielleicht: Weil $\gamma_3 < 90^O$ ist, wurden die Seiten a_1 und b_1 größer als im 2. Dreieck, also gilt hier $c^2 < a_2{}^2 + b_2{}^2$ (3)

Und dann kommt Pythagoras ins Grübeln und meint: Da bringst du mich auf eine neue Idee:
Wir können alle drei Gleichung zusammenfassen und schreiben

$$c^2 = a_2{}^2 + b_2{}^2 + R \quad (4)$$

Der Restsummand R muss dann die Aufgabe übernehmen, aus (4) je nach Winkel die passende Formel (1), (2) oder (3) zu machen. Wäre $\gamma > 90^O$, müsste R negativ sein, im Falle $\gamma = 90^O$ müsste R = 0 sein, im Falle $\gamma < 90^O$ müsste man R als positive Zahl erhalten.

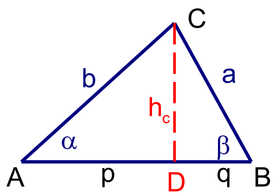
Pythagoras konnte das Rätsel nicht lösen, die moderne Trigonometrie wurde erst im 18. und 19. Jahrhundert weiterentwickelt. Damals dürfte auch der **Kosinussatz** entstanden sein, der die Formel (4) praktikabel macht.

Information: Der Kosinussatz ist der erweiterte Satz des Pythagoras.
Er lautet in „Worten" so:

$$(\text{Seite } 1)^2 = (\text{Seite } 2)^2 + (\text{Seite } 3)^2 - 2\cdot(\text{Seite } 2)\cdot(\text{Seite } 3)\cdot\cos(\text{Gegenwinkel von Seite } 1)$$

Man kann also mit jeder beliebigen Seite beginnen. Daher gibt es drei Formeln dieser Bauart:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad (1)\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \quad (2)\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \quad (3)\end{aligned}}$$



Beweise zum Kosinussatz (für besonders Interessierte) findet man im Text 16025

Jetzt üben wir den Einsatz dieses mächtigen Hilfsmittels!

Seitenberechnung mit dem Kosinussatz

Musterbeispiel Gegeben sind $a = 7{,}5\text{ cm},\ \ c = 8{,}2\text{ cm},\ \ \beta = 85^\circ$

Wie ich schon mehrfach sagte: Zuerst nachdenken.

Man sollte immer zuerst prüfen, ob der Sinussatz anwendbar ist, denn das wäre einfach.
Um den Sinussatz anwenden zu können, muss ein Paar Seite/Gegenwinkel gegeben sein.
Da dies nicht der Fall ist, verwenden wir jetzt den neuen Kosinussatz!

Da wir die Seite b berechnen wollen, verwenden wir Fassung, die mit b^2 beginnt:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta} \quad\Rightarrow\quad b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta} = 10{,}6\text{ cm}$$

Nun, das war doch ganz einfach. Der Taschenrechner liefert:

$\sqrt{7.5^2+8.2^2-2*7.5*8.2*\cos(85)}$
10.6193

Wieder nachdenken: Wie geht es weiter mit der Dreiecksberechnung?

Nach der Anwendung des Kosinussatzes kennen mir das Paar b/β und können somit mit dem Sinussatz zu a den α berechnen, oder zu c den γ.

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \sin^{-1}\frac{a\cdot\sin\beta}{b}} = 44{,}8^\circ.$$

Oder:

$$\boxed{\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \sin^{-1}\frac{c\cdot\sin\beta}{b}} = 50{,}4^\circ$$

$\sin^{-1}\dfrac{7.5\times\sin 85}{10.6}$
44.817
$\sin^{-1}\dfrac{8.2\times\sin 85}{10.6}$
50.411

Allerdings haben wir uns zu viel Mühe gemacht: Wenn man α mit dem Sinussatz berechnet hat, erhält man γ schneller über die Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 50{,}2^\circ$.

Winkelberechnung mit dem Kosinussatz

Musterbeispiel 1 Gegeben sind $a = 7\text{ cm},\ \ b = 4\text{ cm}$ und $c = 6\text{ cm}$

Zuerst nachdenken: Der Sinussatz ist nicht anwendbar, weil dazu ein Winkel gegeben sein muss.

Zur Berechnung von α muss man die Version des Kosinussatzes verwenden, die mit $a^2 =$ beginnt.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \cos^{-1}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = 86{,}4^\circ$$

$\cos^{-1}\dfrac{4^2+6^2-7^2}{2\times4\times6}$
86.41

Der nächste Winkel wird nun mit dem Sinussatz berechnet, das ist einfacher:

$$\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad\Rightarrow\quad \sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} \quad\Rightarrow\quad \beta = \sin^{-1}\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}} = 34{,}8^\circ \text{ und } \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 58{,}8^\circ$$

Musterbeispiel 2 Gegeben sind $a = 5\text{ cm},\ \ b = 2\text{ cm}$ und $c = 6\text{ cm}$

Ich will jetzt γ berechnen also verwende ich die Formel, die mit $c^2 = \ldots$ beginnt:

$\cos^{-1}\dfrac{25+4-36}{2\times5\times2}$
110.48

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \quad\Rightarrow\quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \cos^{-1}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} = 110{,}5^\circ$$

Hinweis: jetzt wird der Kosinuswert negativ, weil $\gamma > 90^\circ$ ist, wie dies anfangs besprochen war!!

4 „Katastrophenaufgaben“

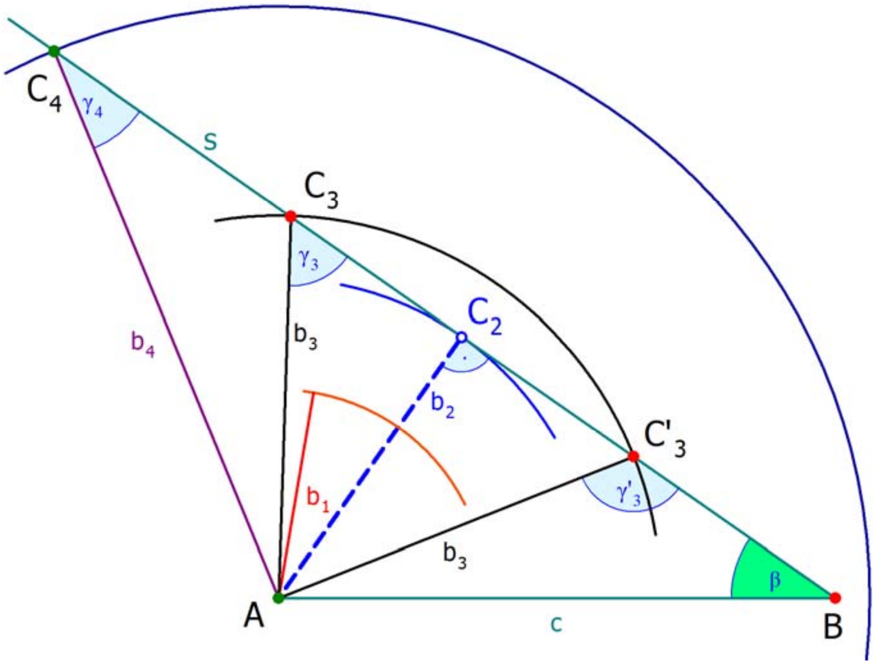
Es gibt Aufgabenstellungen zur Dreiecks-Konstruktion und Dreiecksberechnung, die keine Lösung haben oder sogar zwei. Darauf ist man normalerweise nicht vorbereitet. In Prüfungsaufgaben wird man diese Fallen kaum einbauen. Dennoch muss dies im Unterricht behandelt werden, denn dort sollen ja auch Problemfälle durch DENKEN gelöst werden und nicht nur heile Welt ☺ erscheinen.

Das ist eine Katastrophen-Aufgabe. ***Jetzt gibt es viel zum Denken!***

Konstruiere ein Dreieck aus AB = c = 8 cm, $\beta = 35^O$ und b = AC.

Dabei untersuchen wir 4 Fälle: b_1 = 3 cm / b_2 = 4,59 cm / b_3 = 5,5 cm / b_4 = 8,5 cm

Gegeben sind die Seiten b und c sowie der Winkel β. Also beginnt man die Konstruktion des Dreiecks mit der Seite AB = c und legt an AB in B den Winkel β **mit dem freien Schenkel s** an. Um die noch fehlende Ecke C zu bekommen, zeichnet man einen Kreisbogen mit Radius b um A. Bei unseren vier Beispielen wird der Kreisradius b von b_1 = 3 cm aus immer größer bis b_4 = 8,5 cm. Dabei ergeben sich vier verschiedene Situationen, die man genau erkennen kann:



Der Kreisbogen mit Radius $\boxed{b_1 = 3\text{ cm}}$ schneidet s nicht: Keine Dreieckslösung möglich.

Der Kreisbogen mit Radius $\boxed{b_2 = 4{,}59\text{ cm}}$ berührt s in C_2. $\gamma_2 = 90^O$: Rechtwinkliges Dreieck.

Der Kreisbogen mit Radius $\boxed{b_3 = 5{,}5\text{ cm}}$ schneidet s 2-mal: Lösungen ABC_3 und $ABC_3^{\prime}$.

Der Kreisbogen mit Radius $\boxed{b_4 = 8{,}5\text{ cm}}$ schneidet s 1-mal: Genau eine Lösung ABC_4.

Das ist das Musterbeispiel zum 4. Kongruenzsatz SSW_g:

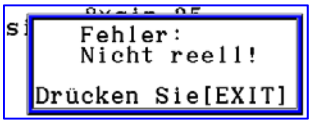
Wenn der gegebene Winkel (hier β) der größeren Seite gegenüber liegt ($\overline{C_4A} > \overline{C_4B}$), dann ist die Konstruktion eindeutig. (Siehe Texte 11111 letzte Seite).

Da wir hier Trigonometrie betreiben, müssen wir uns auch darum kümmern, wie sich dies alles in der Rechnung zeigt. Daher rechne ich jetzt vor, wie sich diese viel Fälle in algebraisch zeigen.

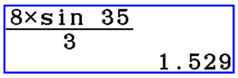
Dazu sollte man zuerst wieder über die Rechenmethoide nachdenken:
In dieser Aufgabe sind b und β gegeben, also ein Paar Seite/Gegenwinkel.
Daher ist der Sinussatz anwendbar. Mit ihm erhalten wir γ.

Berechnung im 1. Fall: AB = c = 8 cm, $\beta = 35^O$ und **b_1 = 3 cm**.

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\frac{c \cdot \sin\beta}{b}$$



Der Taschenrechner meldet, dass es keine reelle Zahl als Ergebnis für den Winkel gibt. Als eifriger Schüler will man natürlich wissen, woher dieser Schabernack kommt. Dazu diese Rechnung:



Und da haben wir den Salat: Dieses Ergebnis soll der Sinuswert von γ sein! Nun solltest du dich daran erinnern wie der Sinus definiert worden ist. Ich verrate es dir: Der Sinus ist im rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis $\sin\gamma = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Und weil in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse stets die größte Seite ist, kann der Sinus eines Winkels nie größer als 1 sein!

Es gibt also kein Dreieck mit diesen Maßen. Die Abbildung auf der Seite zuvor hat dies ja auch gezeigt.

Fazit: Vor diesem Fall müssen wir keine Angst haben. Wenn dieser vorliegt, wenn es also keine Lösung gibt, dann sagt uns das der Taschenrechner auf seine Weise.

Berechnung im 2. Fall: AB = c = 8 cm, $\beta = 35^O$ und **b_2 = 4,59** cm.

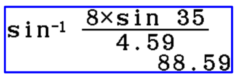
Das hat in der Konstruktion zu einem **rechtwinkligen Dreieck** geführt, und die Abbildung zeigt auch warum: Der Kreisbogen um A mit dem Radius b_2 berührt den freien Schenkel s von β. Dieser wird also zur Tangente des Kreises um A. Und die steht bekanntlich senkrecht auf dem Radius, der hier AC_2 ist.

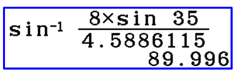
Was sagt uns die Rechnung dazu?

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\frac{c \cdot \sin\beta}{b}$$

Nun passiert etwas Verblüffendes: Der Taschenrechner liefert uns NIE die 90^O, die wir auf Grund der Abbildung eigentlich erwarten. Warum? Weil b = 4,59 cm dazu nicht genau passt, sondern eine Zahl, die wir gleich berechnen werden. Hier zwei Screenshots, die das gut zeigen:

b = 4,59 cm führt zu $\gamma = 88{,}59^O$, b = 4,5886115 cm zu $89{,}996^O$.

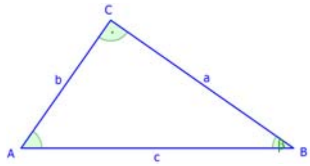




b = 4,5886 ergibt eine Fehlermeldung, weil dann der Sinuswert größer als 1 wird.

Bei welcher Streckenlänge von b_2 wird der Winkel γ genau 90^O groß?

Im rechtwinkligen Dreieck ist $\boxed{\sin\beta = \frac{b}{c} \quad\Rightarrow\quad b = c \cdot \sin\beta = ...}$



Ein Taschenrechner berechnet damit:

```
8×sin 35
           4.588611491
```

Der Wert für b (damit das Dreieck rechtwinklig wird und s den Kreisbogen berührt), ist eine unendlich lange Dezimalzahl, die auch nicht periodisch ist. Man kann die für 90^O benötigte Länge von b_2 also gar nicht genau angeben. **b_2 erhält man also nur näherungsweise.**

Daher wird eine solche Aufgabe mit diesem b-Wert auch nie gestellt. Diese Aufgabe ist rein theoretischer Natur. Man sollte eben wissen, dass es diesen Fall „theoretisch" gibt, dass bei dieser Aufgabe (Gegeben sind 2 Seiten und ein Gegenwinkel) auch ein rechtwinkliges Dreieck entstehen kann. Man kann dazu aber die Gegenseite des gegebenen Winkel nicht exakt angeben. *Wahnsinn…*

Jetzt kommt der Problemfall:

Berechnung im 3. Fall: AB = c = 8 cm, $\beta = 35^O$ und **b_3 = 5,5 cm**.

In der Konstruktion hat der Kreisbogen um A mit dem Radius b_3 den freien Schenkel s von β zweimal geschnitten. Daher erhielten wir zwei nicht kongruente Dreiecke.

Wie erkennt man dies in der Rechnung?

$$\boxed{\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \sin^{-1}\frac{c \cdot \sin\beta}{b}}$$

Der Taschenrechner meist so programmiert, dass er nur eine Lösung ausgibt. Man sieht:

Aus $\sin\gamma = 0{,}83429$ berechnet er $\gamma \approx 56{,}582^O$.

Die zweite Lösung verschweigt er uns.

```
8×sin 35
  5.5
             0.83429
sin⁻¹ 8×sin 35
        5.5
             56.542
```

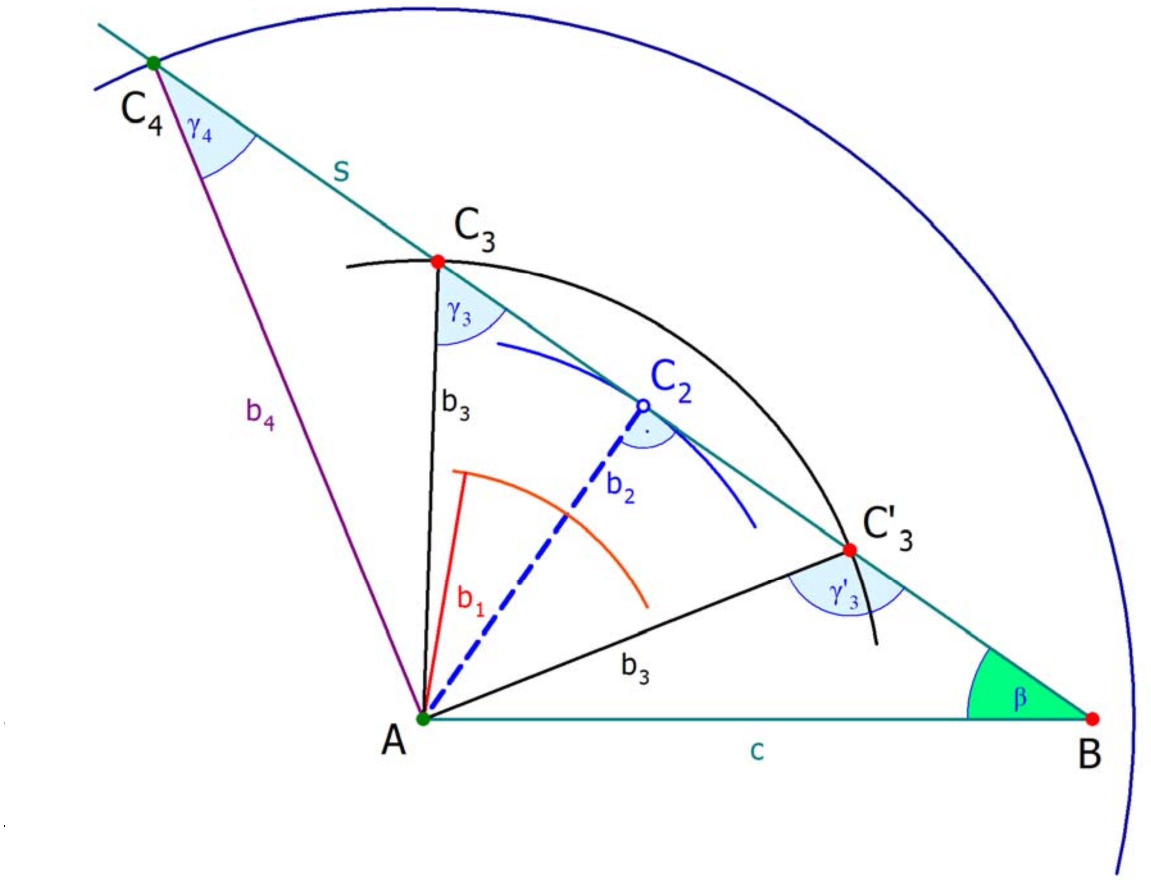
Wie können wir

1. aus den gegebenen Zahlen erkennen, dass es eine 2. Lösung gibt?
2. die zweite Lösung berechnen?

Und da Lehrer gerne auch eine solche Aufgabe stellen, um zu sehen, was der Schüler gelernt hat bzw. weiß, kommt man nicht darum herum, jetzt mitzudenken und das Ergebnis zu lernen.

Auf der nächsten Seite beschreibe ich, wie einfach es ist, diesen Fall zu erkennen.

Zur Untersuchung dieses Falls benötigen wir nochmals diese „Zeichnung".



Ist b kleiner als c, dann kann es (wie im Falle b_3 = 5,5 cm) **zwei Schnittpunkte C_3 und C'_3 geben, also zwei verschiedene Dreiecke oder gar keinen Schnittpunkt, also kein Dreieck.**

Wir können also festhalten: Ist **b größer als c**, dann gibt es eine eindeutige Lösung.
Ist **b kleiner als c**, dann gibt es zwei oder keine Lösung.

Dies wird allgemein so formuliert:

Sind für ein Dreieck zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren Seite gegeben, dann ist das Dreieck eindeutig festgelegt. **(SSW_g)**

Sind für ein Dreieck zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite gegeben, dann gibt es kein Dreieck oder zwei Dreiecke. **(SSW_k)**

Wie berechnet man den Winkel zur zweiten Lösung?

Die Abbildung zeigt, dass das Dreieck $AC_3C'_3$ gleichschenklig ist. Der Winkel bei C'_3 hat dieselbe Größe wie γ_3. Daher gilt für den Außenwinkel $\boxed{\gamma'_3 = 180^\circ - \gamma_3}$.

Für unsere Aufgabe folgt also für die zweite Lösung $\gamma'_3 = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 56{,}5^\circ = 123{,}5^\circ$.

Nun fehlt noch die Rechnung für den 4. Fall:

Berechnung im 4. Fall: AB = c = 8 cm, $\beta = 35^{O}$ und **b_4 = 8,5 cm.**

Wir wissen jetzt, dass der gegebene Winkel der größeren Seite gegenüber liegt.
Also gibt es eine eindeutige Lösung:

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\beta}{b} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\frac{c\cdot\sin\beta}{b}$$

Ergebnis: $\gamma_4 \approx 32{,}7^{O}$.

$\sin^{-1}\frac{8\times\sin 35}{8.5}$ 32.672

Den fehlenden Winkel α kann man dann über die Winkelsumme ermitteln.

Zusammenfassung

Man sollte vor einer Dreiecksberechnung an Hand der gegebenen Größen überlegen, welcher Fall vorliegt. Dann kann man die Passende Methode verwenden.

1. Fall: Gegeben sind 1 Seite und 2 Winkel: SWW

1. Schritt: Berechnung des 3. Winkels über die Winkelsumme:
2. Schritt: Berechnung der 2. Seite mit dem Sinussatz.
3. Schritt: Berechnung der 3. Seite mit dem Sinussatz.

2. Fall: Gegeben sind 2 Seiten und der Gegenwinkel der größeren Seite: SSW_g

1. Schritt: Berechnung des Gegenwinkels der kleineren Seite: Sinussatz. (Eindeutig!)
2. Schritt: Berechnung des 3. Winkels über die Winkelsumme.
3. Schritt: Berechnung der 3. Seite mit dem Sinussatz.

3. Fall: Gegeben sind 2 Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite: SSW_k

1. Schritt: Berechnung des Gegenwinkels der größeren Seite: Sinussatz.
   Wenn es eine Lösung gibt, dann berechnet man die zweite über $180^{O} - \gamma$
2. Schritt: Berechnung des 3. Winkels über die Winkelsumme.
3. Schritt: Berechnung der 3. Seite mit dem Sinussatz.

4. Fall: Gegeben sind 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel: SWS

1. Schritt: Berechnung der 3. Seite mit dem Kosinussatz.
2. Schritt: Berechnung des 2. Winkels mit dem Sinussatz.
3. Schritt: Berechnung des 3. Winkels über die Winkelsumme.

5. Fall: Gegeben sind 3 Seiten: SSS

1. Schritt: Berechnung eines Winkels mit dem Kosinussatz.
   Damit später nicht noch der Fall SSW_k eintritt, berechnet man den Winkel, welcher der größten Dreiecksseite gegenüberliegt.
2. Schritt: Berechnung des 2. Winkels mit dem Sinussatz.
3. Schritt: Berechnung des 3. Winkels über die Winkelsumme.

5 Übungsaufgaben

Hier muss man nicht unbedingt alle Aufgaben zahlenmäßig lösen. Die Eingabe in einen Taschenrechner ist nicht das Problem. Dieses ist vielmehr das Erkennen der Lösungsmethode. Man sollte zuerst herausfinden, welcher Fall vorliegt und denn überlegen, ob man Sinussatz oder Kosinussatz verwenden muss.

Ich zeige dies ausführlich in meinen folgenden Lösungen. Diese Aufgaben werden sehr ausführlich im Text 16025 gelöst. Hier gebe ich nur die wichtigsten Lösungsschritte an.

Die Aufgabe heißt in allen Fällen: Berechne die restlichen Seiten/Winkel des Dreiecks.

Aufgabe 1 Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie $\gamma = 75{,}0^\circ$.

Aufgabe 2 Gegeben sind die Seiten a = 4,3 cm und b = 8,0 cm sowie $\gamma = 75{,}0^\circ$.

Aufgabe 3 Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie $\beta = 75{,}0^\circ$.

Aufgabe 4 Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie $\beta = 35{,}0^\circ$.

Aufgabe 5 Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie a = 10,4 cm.

Aufgabe 6 Gegeben sind Gegeben sind a = 3 cm, c =8 cm und $\beta = 35{,}0^\circ$

Aufgabe 7 Gegeben sind a = 12 cm, $\alpha = 78^\circ$ und c = 9 cm.

Aufgabe 8 Gegeben sind b = 5 cm, $\beta = 36{,}1^\circ$ und c = 6 cm.

Aufgabe 9 Gegeben sind Gegeben sind a = 7 cm, b = 4 cm und c = 6 cm.

Aufgabe 10 Gegeben sind Gegeben sind a = 5 cm, b = 2 cm und c = 6 cm.

Lösung Aufgabe 1

Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie $\gamma = 75{,}0^{\circ}$.

Planung:

1. Gegeben sind 2 Seiten und der Gegenwinkel der größeren Seite (SSW$_g$). In diesem Fall ist das Dreieck eindeutig festgelegt.
2. Weil das Paar c/γ (Seite/Gegenwinkel) gegeben ist, kann man mit dem Sinussatz den Gegenwinkel β zu b berechnen:

$$\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b\cdot\sin\gamma}{c} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\frac{b\cdot\sin\gamma}{c}} \approx 46{,}4^{\circ}$$

$\alpha = 180^{\circ} - \alpha - \beta \approx 58{,}6^{\circ}$. Jetzt berechnet man a mit dem Sinussatz:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}} = 7{,}1\,\text{cm}$$

```
sin⁻¹(6×sin 75 / 8)
                46.42
180−Ans−75
                58.57
8×sin Ans / sin 75
                7.067
```

Lösung Aufgabe 2

Gegeben sind die Seiten a = 4,3 cm und b = 8,0 cm sowie $\gamma = 75{,}0^{\circ}$.

Planung:

1. Gegeben sind 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS). In diesem Fall ist das Dreieck eindeutig festgelegt.
2. Weil kein Paar Seite/Gegenwinkel gegeben ist, muss man mit dem Kosinussatz die Gegenseite zum gegebenen Winkel γ berechnen:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma}} \approx 8{,}0\text{ cm}$$

Jetzt kennt man das Paar c / γ und kann daher mit dem Sinussatz den Gegenwinkel zu a oder zu b berechnen:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\gamma}{c} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{a\cdot\sin\gamma}{c}} \approx 31{,}1^{\circ}$$

Dann: $\beta = 180^{\circ} - \alpha - \gamma \approx 73{,}9^{\circ}$

```
√(4.3²+64−8.6×8×cos 75)
                8.042589738
sin⁻¹(4.3×sin 75 / Ans)
                31.09347246
180−Ans−75
                73.90652754
```

Lösung Aufgabe 3

Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie $\beta = 75{,}0^{\circ}$.

Planung:

1. Gegeben sind 2 Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite (SSW$_k$). In diesem Fall gibt es keine Lösung oder 2 Lösungen.
2. Weil das Paar **b/β** (Seite/Gegenwinkel) gegeben ist, kann man mit dem Sinussatz den Gegenwinkel γ zu c berechnen:

$$\boxed{\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\beta}{b} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\frac{c\cdot\sin\beta}{b}}$$

```
Fehler:
Nicht reell!
Drücken Sie[EXIT]
```

Der Taschenrechner liefert kein reelles Ergebnis.

Es gibt kein Dreieck mit den gegebenen Stücken.

Lösung Aufgabe 4

Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie $\beta = 35{,}0^{\circ}$.

Planung:

1. Gegeben sind 2 Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite (SSW_k).
   In diesem Fall gibt es keine Lösung oder 2 Lösungen.
2. Weil das Paar **b/β** (Seite/Gegenwinkel) gegeben ist, kann man mit dem Sinussatz den Gegenwinkel γ zu c berechnen:

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\beta}{b} \approx 0{,}765 \Rightarrow \gamma_{1,2} = \sin^{-1} 0{,}765$$

```
sin⁻¹ 8×sin 35
        6
             49.886
180−Ans
             130.11
```

Die erste Lösung ist $\gamma_1 \approx 49{,}9^{\circ}$

Die zweite Lösung ist $\gamma_2 = 180^{\circ} - \gamma_1 \approx 130{,}1^{\circ}$

Fortsetzung der 1. Lösung: 3. Winkel: $\alpha_1 = 180^{\circ} - \beta - \gamma_1 \approx 95{,}1^{\circ}$

3. Seite a mit Sinussatz. *Tipp: Winkel β verwenden, da er genau bekannt ist.*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = \frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow a_1 \approx 10{,}4 \text{ cm}$$

```
180−35−49.9
                95.1
6×sin 95.1
 sin 35
         10.41926762
```

Fortsetzung der 2. Lösung: 3. Winkel: $\alpha_2 = 180^{\circ} - \beta - \gamma_2 \approx 14{,}9^{\circ}$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = \frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow a_2 \approx 2{,}7 \text{ cm}$$

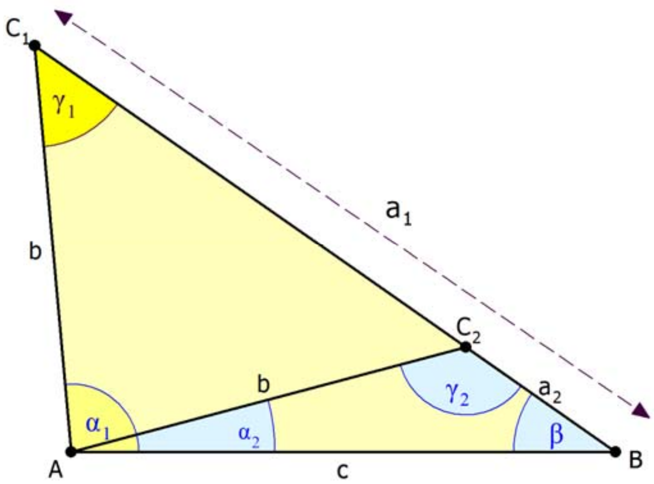
```
180−35−130.1
                14.9
6×sin 14.9
 sin 35
         2.689784066
```

Ergebnisse:

ΔABC_1:	a_1 = 10,4 cm, b = 6 cm, c = 8 cm $\alpha_1 = 95{,}1^{\circ}$, $\beta = 35^{\circ}$, $\gamma_1 = 49{,}9^{\circ}$
ΔABC_2:	a_2 = 2,7 cm, b = 6 cm, c = 8 cm $\alpha_2 = 14{,}9^{\circ}$, $\beta = 35^{\circ}$, $\gamma_2 = 130{,}1^{\circ}$

Diese interessante Aufgabe sollte man auch durch eine Konstruktion lösen.

Hier meine „Zeichnung“:



Warnung vor einer gefährlichen Lösungsmethode zu Aufgabe 4

Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie $\beta = 35{,}0^{\circ}$.

Meine Empfehlung ist: Wenn möglich verwende stets den Sinussatz, denn er ist einfacher zu benutzen als der Kosinussatz. Was passiert, wenn man hier dennoch mit dem Kosinussatz beginnt?

Ich verwende diese Gleichung: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$ und stelle diese Gleichung nach a um:

$$a^2 - (2c \cdot \cos) \cdot a + \left(c^2 - b^2\right) = 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung für a, die mit Zahlen (aber ohne Einheiten) so aussieht:

$$a^2 - 16 \cdot \cos 35^{\circ} \cdot a + 28 = 0$$

Die Lösungsformel liefert: $$a_{1,2} = \frac{16 \cdot \cos 35^{\circ} \pm \sqrt{256 \cdot \cos^2 35^{\circ} - 4 \cdot 28}}{2} \approx \begin{cases} 10{,}4 \\ 2{,}7 \end{cases} (\text{cm})$$

Bisher ist alles gut, sieht man vom großen Aufwand für die Lösungsformel ab.

Nun kann man α mit dem Sinussatz berechnen.

Im 1. Fall geht man von $a_1 = 10{,}4 \text{ cm}$ aus.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_{1,2} = \frac{a_1 \cdot \sin\beta}{b} = \frac{10{,}4 \cdot \sin 35^{\circ}}{6} \approx 0{,}994$$

Dazu gehören zwei Lösungen: $\alpha_1 = \sin^{-1}(0{,}994) \approx 83{,}7^{\circ}$

$\alpha_2 = 180^{\circ} - \alpha_1 \approx 96{,}3^{\circ}$

Der 2. Fall geht von $a_2 = 2{,}7 \text{ cm}$ aus und führt zu zwei weiteren Lösungen:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_{3,4} = \frac{a_2 \cdot \sin\beta}{b} = \frac{2{,}7 \cdot \sin 35^{\circ}}{6} \approx 0{,}258$$

Dazu gehören zwei Lösungen: $\alpha_3 = \sin^{-1}(0{,}258) \approx 15{,}0^{\circ}$

$\alpha_4 = 180^{\circ} - \alpha_3 \approx 165{,}0^{\circ}$

Jetzt hat man die Auswahl von vier Alpha-Winkeln. Wir kennen die Lösung bereits und wissen, dass es nur zwei gibt. Wie findet man diese heraus?

Also Schluss mit dieser Sucherei – Der Leser hat erkannt, dass man diesen Weg (mit dem Kosinussatz zu beginnen) nicht gehen sollte, wenn der Sinussatz möglich ist!

Lösung Aufgabe 5

Gegeben sind die Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie a = 10,4 cm.

Planung:

1. Gegeben sind 4 Seiten (SSS).
In diesem Fall ist das Dreieck eindeutig festgelegt.

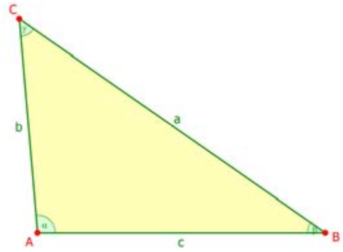
2. Weil kein Paar Seite/Gegenwinkel gegeben ist, muss man mit dem Kosinussatz einen der drei Winkel berechnen.

Es ist egal, wie man anfängt. Ich möchte jetzt α berechnen, daher beginne ich den Kosinussatz so:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Ergebnis: $\alpha \approx 94{,}9^{\mathrm{O}}$.

$\cos^{-1}\left(\frac{36+64-10.4^2}{2\times6\times8}\right)$
94.8760



Die verkleinerte Abbildung zeigt, dass α größer als 90^{O} ist.

Den nächsten Winkel kann man jetzt mit dem Sinussatz berechnen, denn man kennt jetzt das Paar $\boxed{a / \alpha}$. Ich berechne (z. B.) γ durch:

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\frac{c \cdot \sin\alpha}{a} \approx 50{,}0^{\mathrm{O}}$$

$\cos^{-1}\left(\frac{36+64-10.4^2}{2\times6\times8}\right)$
94.8760
$\sin^{-1}\left(\frac{8\times\sin \text{Ans}}{10.4}\right)$
50.0358

Hinweis: Um nicht einen gerundeten Wert von α verwenden zu müssen, habe ich mit dem Befehl „Ans“ das letzte Rechnerergebnis von α einsetzen lassen

ACHTUNG: Kontrolle, ob das Ergebnis eindeutig ist:

Wir haben γ berechnet aus a = 10,4 cm und $\alpha \approx 94{,}9^{\mathrm{O}}$ sowie c = 8 cm.

Das ist der Fall SSW_g, denn der Winkel α liegt der größeren Seite gegenüber.

Also ist das Ergebnis eindeutig!

Der Schluss ist einfach: $\beta = 180^{\mathrm{O}} - \alpha - \gamma \approx 180^{\mathrm{O}} - 94{,}9^{\mathrm{O}} - 50{,}0^{\mathrm{O}} = 35{,}1^{\mathrm{O}}$

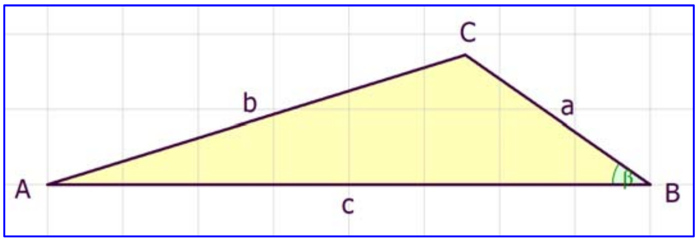
Lösung Aufgabe 6

Gegeben sind die Seiten a = 3,0 cm und c = 8,0 cm sowie $\beta = 35{,}0^{\circ}$.

Planung: Gegeben sind 2 Seiten und der <u>eingeschlossene Winkel</u> (SWS). Da also kein Paar Seite/Gegenwinkel gegeben ist. Wendet man den **Kosinussatz** an.

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}} \approx 5{,}8 \text{ cm}$$

Die Konstruktion liefert ein eindeutiges Ergebnis: Man beginnt mit c, legt β an und trägt darauf a ab bis C.



Jetzt kann man mit dem Paar $\boxed{b / \beta}$ den Gegenwinkel zu c oder zu a berechnen. Ich berechne γ :

$$\boxed{\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sin^{-1}\frac{c \cdot \sin\beta}{b}} \approx 52{,}3^{\circ} \quad ?$$

```
sin⁻¹ 8×sin 35
       5.8
         52.29
```

Dies kann nun nicht sein, denn die Zeichnung zeigt, dass γ größer als 90° ist.

Wie kann das sein?

Der Sinussatz wurde auf c, b und β angewandt, und da β der kleineren dieser beiden Seiten gegenüber liegt, handelt es sich um SSW_k . In diesem Falle müssen wir beide Winkel-Lösungen berechnen. $\gamma_1 = 52{,}3^{\circ}$ und $\gamma_2 = 180^{\circ} - \gamma_1 = 127{,}7^{\circ}$

WARNUNG:

Kontrolliere stets, ob der Fall SSW_k vorliegt. Der macht nämlich Probleme

Wenn ich also hier VOR DER BERECHNUNG von γ festgestellt habe, dass SSW_k vorliegt, dann berechne ich eben nicht γ sondern α. Dazu brauch ich a, und dies ist die kleinere Seite.

In diesem Falle liegt also β der größeren Seite gegenüber und das Problem ist weg.

Neue Berechnung:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\frac{a \cdot \sin\beta}{b}} \approx 17{,}3^{\circ}$$

Anschließend findet man dann γ über die Winkelsumme.

Lösung Aufgabe 7

Gegeben sind a = 12 cm, $\alpha = 78^{O}$ und c = 9 cm

Planung:
1. Gegeben ist ein Paar Seite a/Gegenwinkel α.
   Also ist der Sinussatz anwendbar.
2. Es liegt der Fall SSW_g vor. Daher ist das Dreieck eindeutig.

Wir berechnen den Gegenwinkel zu c, also γ:

$$\boxed{\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{a} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\frac{c\cdot\sin\alpha}{a}} \approx 47{,}2^{O}.$$

Berechnung des dritten Winkels: $\beta = 180^{O} - \alpha - \gamma = 180^{O} - 78^{O} - 47{,}2^{O} = 54{,}8^{O}$

Die zugehörige Gegenseite liefert der Sinussatz: (Beginne mit b !!!)

$$\boxed{\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}} = 10{,}0\text{ cm}$$

Taschenrechner:

$\sin^{-1}\frac{9\times\sin 78}{12}$ 47.18

$\frac{12\times\sin 54.8}{\sin 78}$ 10.02

Lösung Aufgabe 8

Gegeben sind b = 5 cm, $\beta = 36{,}1^{O}$ und c = 6 cm.

Planung:
1. Gegeben ist ein Paar Seite/Gegenwinkel.
   Also ist der Sinussatz anwendbar.
2. Es liegt der Fall WWS_k vor. Also ist es eine Problemaufgabe.

Berechnung von γ mit dem Sinussatz.

$$\boxed{\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\beta}{b} \Rightarrow \gamma_1 = \sin^{-1}\frac{c\cdot\sin\beta}{b}} \approx 45{,}0^{O}$$

$\sin^{-1}\frac{6\times\sin 36.1}{5}$ 44.9942

180−Ans 135.005

Wenn es im Falle SSW_k eine Lösung gibt, dann existiert auch

Noch eine zweite: $\gamma_2 = 180^{O} - \gamma_1 \approx 135^{O}$

Die zugehörigen Winkel α sind: $\alpha_1 = 180^{O} - \beta - \gamma_1 \approx 98{,}9^{O}$

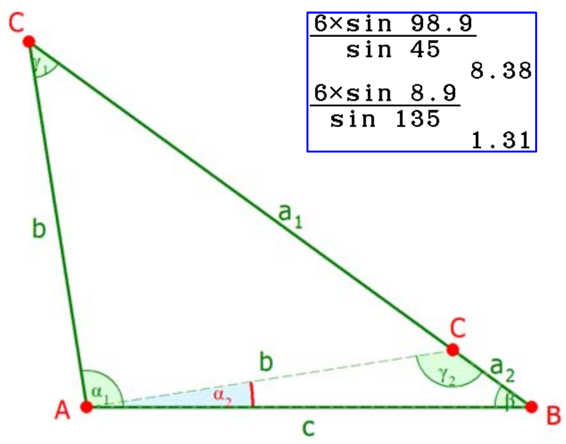
$\alpha_2 = 180^{O} - \beta - \gamma_2 \approx 8{,}9^{O}$

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a_1 = \frac{c\cdot\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1}} \approx 8{,}4\text{ cm}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{c\cdot\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2}} \approx 1{,}3\text{ cm}$$

$\frac{6\times\sin 98.9}{\sin 45}$ 8.38

$\frac{6\times\sin 8.9}{\sin 135}$ 1.31



Lösung Aufgabe 9

Gegeben sind die Seiten a = 7 cm, b = 4 cm und c = 6 cm.

Planung:

1. Gegeben sind 3 Seiten (SSS).
   In diesem Fall ist das Dreieck eindeutig festgelegt.
2. Weil kein Paar Seite/Gegenwinkel gegeben ist, muss man mit dem Kosinussatz einen der drei Winkel berechnen.

Es ist egal, wie man anfängt. Ich möchte jetzt α berechnen, daher beginne ich den Kosinussatz so:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \;\Rightarrow\; \alpha = \cos^{-1}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Ergebnis: $\alpha \approx 86{,}4^{\circ}$.

Übrigens berechnet man β und γ nicht auch noch mit dem Kosinussatz.

β erhält man schneller mit dem Sinussatz, und γ dann über die Winkelsumme.

Da α der größeren Seite gegenüberliegt, wird das Ergebnis eindeutig:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \;\Rightarrow\; \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \;\Rightarrow\; \beta = \sin^{-1}\frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = 34{,}8^{\circ}$$

$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 58{,}8^{\circ}$$

Lösung Aufgabe 10

Gegeben sind die Seiten a = 5 cm, b = 2 cm und c = 6 cm.

Planung:

1. Gegeben sind 3 Seiten (SSS).
   In diesem Fall ist das Dreieck eindeutig festgelegt.
2. Weil kein Paar Seite/Gegenwinkel gegeben ist, muss man mit dem Kosinussatz einen der drei Winkel berechnen.

Es ist egal, wie man anfängt. Ich möchte jetzt γ berechnen, daher beginne ich den Kosinussatz so:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \;\Rightarrow\; 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \;\Rightarrow\; \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \;\Rightarrow\; \gamma = \cos^{-1}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Ergebnis: $\gamma \approx 110{,}5^{\circ}$

Vorsicht: γ liegt der größeren Seite gegenüber, also liefert der Sinussatz zur Berechnung von

, α (oder β) ein eindeutiges Ergebnis:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \;\Rightarrow\; \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c} \;\Rightarrow\; \beta = \sin^{-1}\frac{b \cdot \sin\gamma}{c} \approx 18{,}2^{\circ}$$

$$\alpha = 180^{\circ} - \beta - \gamma = 51{,}3^{\circ}$$