Keine Ahnung vom Potenzrechnen

Teil 1

Was bedeuten

Potenzen

???

Datei Nr. 12341

Stand 22.5.2020

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Potenzrechnen ist bei den meisten Schülern sehr unbeliebt, weil es eben auch zu wenig trainiert wird. Ich habe diesen neuen Text für Interessierte geschrieben, die eine kompakte Wiederholung suchen.

Die Anforderungen kann man sehr weit in die Höhe treiben.
Ich habe daher einige sehr ausführliche Texte verfasst, die man auf der Mathe-CD findet:

12300	Potenzen mit natürlichen Exponenten
12301	Potenzen mit negativen Exponenten
12302	Potenzen mit Bruch-Exponenten (und viel Wurzelrechnen)
12305	Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht (dieser Text)
12306	Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht
12311	Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)
12321	Lernprogramm
12333	Übung 4
12341	Keine Ahnung von Potenzen (Kompakt zur Wiederholung) *2020*
12500	Gruße Aufgabensammlung
12510	Sammlung von Tests
	(Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Inhalt

1……Was bedeuten Potenzen ?

Zunächst einmal ist eine Potenz in der Mathematik eine ***Verknüpfung von zwei Zahlen***.
Du kennst du schon andere Verknüpfungen. So verknüpft man die Zahlen 4 und 3 z. B. durch die

	Addition:	$4 + 3 = 7$
	Subtraktion:	$4 - 3 = 1$
	Multiplikation:	$4 \cdot 3 = 12$
	Division:	$4 : 3 = \frac{4}{3}$
und	Potenzieren:	$4^3 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{3 Faktoren}} = 64$

Die untere Zahl heißt die **Basis**, die kleine hochgestellte Zahl heißt **Hochzahl oder Exponent**.

Berechnungsvorschrift für das Potenzieren mit einer natürlichen Zahl:

Man multipliziert die Basis so oft mit sich selbst, wie es der Exponent angibt. D1

$3^2 = \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{2 Faktoren}} = 9$, $2^6 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{6 Faktoren}} = 64$, $10^5 = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{5 Faktoren}} = 100.000$.

Diese Vorschrift macht nur Sinn, wenn der **Exponent eine natürliche Zahl** ist.

Potenzrechnen erfordert ein Grundwissen an Potenzen, die man auswendig wissen sollte

sozusagen **das kleine „1-hoch-1“.**

Alle Quadratzahlen bis 20^2:

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$
$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	$14^2 = 196$
$15^2 = 225$	$16^2 = 256$	$17^2 = 289$	$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	$20^2 = 400$	

Ferner diese oft benötigten Potenzen

Nullpotenzen:	$0^1 = 0$	$0^2 = 0$	$0^n = 0$	für $n \neq 0$	usw.
Einerpotenzen:	$1^1 = 1$	$1^2 = 1$	$1^3 = 1$	$1^n = 1$	für alle $n \in \mathbb{N}$
Zweierpotenzen:	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$
Dreierpotenzen:	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
Viererpotenzen:	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$
Fünferpotenzen:	$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$	

Wir haben soeben besprochen, wie man Potenzen mit natürlichen Exponenten berechnet.
Doch wie berechnet man dann Potenzen mit negativen Exponenten oder Bruchexponenten?

Etwa 4^{-3} oder $4^{\frac{1}{2}}$ oder gar $4^{-\frac{1}{2}}$ oder besonders schwer: $4^{\frac{5}{4}}$?

Potenzen mit dem Exponenten 0:

Es ist $4^0 = 1$, $9^0 = 1$, $137^0 = 1$, usw.

Jeder Zahl „**hoch 0**" hat das Ergebnis 1: $a^0 = 1$ für jedes $a \neq 0$. D2

Die Begründung folgt aus der Divisionsregel von Potenzen. Das zeige ich später.

Potenzen mit negativen Exponenten sind Brüche:

Es wurde festgelegt: $\boxed{4^{-3} = \frac{1}{4^3}} = \frac{1}{64}$, $\boxed{2^{-5} = \frac{1}{2^5}} = \frac{1}{32}$, $\boxed{a^{-b} = \frac{1}{a^b}}$ D3

Man kann sich das so merken:

Das Minuszeichen im Exponenten führt zu einem Bruch.

Man lässt das Minuszeichen weg und schreibt die Potenz in den Nenner des Bruches.

Das Minuszeichen im Exponenten führt also <u>nicht zu</u> <u>einem Minuszeichen für das Ergebnis!</u>

Potenzen mit Bruchexponenten sind Wurzeln:

Es wurde festgelegt: $\boxed{4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}} = 2$, $\boxed{25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25}} = 5$, $\boxed{8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}} = 2$

Allgemein: $\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},\ a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a},\ a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a},\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ D4

Komplizierter ist das mit diesen Potenzen, die später besprochen werden:

$\boxed{4^{\frac{2}{3}} = \left(4^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4^2}} = \sqrt[3]{16}$ oder so: $\boxed{4^{\frac{2}{3}} = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \sqrt[3]{4}^2} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{16}$

$\boxed{3^{\frac{5}{2}} = \left(3^5\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^5}} = \sqrt{243}$ oder so: $\boxed{3^{\frac{5}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^5 = \sqrt{3}^5} = \underbrace{\overbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}^{3} \cdot \overbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}^{3} \cdot \sqrt{3}}_{\text{5 Faktoren}} = 9 \cdot \sqrt{3}$

$\boxed{9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(9^3\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9^3}}}$ oder besser so: $\boxed{9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{9}^3}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

Man sieht, dass die Berechnungen mit Bruchexponenten schwer sind. Diesen werde ich einen eigenen Abschnitt widmen.

Noch eine Anmerkung dazu: Diese Definitionen für negative Exponenten oder Bruchexponenten sind natürlich nicht willkürlich gemacht, sondern wurden so festgelegt, dass ein sinnvolles Arbeiten mit den geltenden Rechengesetzen für Potenzen möglich wird. Das zeige ich alles noch.

Eine wichtige Geschichte: **Potenzieren von Brüchen**

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ wird laut Vorschrift so berechnet, dass man $\frac{1}{2}$ in den Nenner eines neuen Bruches schreibt:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Analog ist $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ oder $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

Analog dazu ist es bei diesen Brüchen:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$

Man kann also sagen (und sollte es sich merken):

Besitzt ein Bruch den Exponenten -1, dann ist das Ergebnis sein Kehrwert; $\boxed{\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a}$

Das kann man für andere negative Exponenten ausnützen:

$\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2} = 9$ $\qquad$ $\boxed{\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^4}$ $\qquad$ $\boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3}$ $\qquad$ $\boxed{\left(\frac{2}{7}\right)^{-5} = \left(\frac{7}{2}\right)^5}$

Und jetzt **<u>Übungen</u>** zu dem, was bisher gezeigt worden ist:

(1) $5^3 = ?$ $\quad 10^3 = ?$ $\quad 2^{11} = ?$ $\quad 12^3 = ?$ $\quad (-3)^4 = ?$ $\quad (-3)^3 = ?$

(2) $5^{-2} = ?$ $\quad 7^{-2} = ?$ $\quad 2^{-4} = ?$ $\quad 1^{-12} = ?$ $\quad 10^{-4} = ?$ $\quad (-2)^{-5}$

(3) Schreibe den Bruch als Potenz: $\frac{1}{7} =$ $\quad \frac{1}{10} =$ $\quad \frac{1}{4} =$ $\quad \frac{1}{x} =$

(4) Schreibe als Potenz: $\frac{1}{9} = 3^{\square}$, $\frac{1}{125} = 5^{\square}$, $\frac{1}{16} = 2^{\square}$, $\frac{1}{81} = 9^{\square} = 3^{\square}$, $\frac{1}{a^2} = \square$

(5) $36^{\frac{1}{2}} = ?$ $\quad 144^{\frac{1}{2}} = ?$ $\quad 8^{\frac{1}{3}} = ?$ $\quad 1000^{\frac{1}{3}} = ?$ $\quad 27^{-\frac{1}{3}} = ?$ $\quad 16^{\frac{1}{4}} = ?$

(6) Schreibe als Potenz: $\sqrt{5} = 5^{\square}$, $\sqrt{12} = 12^{\square}$, $\sqrt[3]{2} = 2^{\square}$, $\sqrt[4]{5} = 5^{\square}$

(7) Berechne geschickt: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ $\quad \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

Lösungen:

(1) $5^3 = 5\cdot 5\cdot 5 = 125$ $\qquad 10^3 = 1000$ $\qquad 2^{11} = \overbrace{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{=2^{10}=1024}\cdot 2}^{11\,\text{Faktoren}} = 2048$

$12^3 = 12\cdot 12\cdot 12 = 144\cdot 12 = 1440 + 288 = 1728$

$(-3)^4 = \underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{9}\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{9} = 9\cdot 9 = 81$ $\qquad (-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 9\cdot(-3) = -27$

Bei geradem Exponenten wird das Ergebnis positiv, bei ungeradem negativ.

(2) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ $\qquad 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ $\qquad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ $\qquad 1^{-12} = \frac{1}{1^{12}} = \frac{1}{1} = 1$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$ $\qquad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$

(3) $\frac{1}{7} = 7^{-1}$ $\qquad \frac{1}{10} = 10^{-1}$ $\qquad \frac{1}{4} = 4^{-1}$ $\qquad \frac{1}{x} = x^{-1}$

(4) $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$ $\qquad \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$ $\qquad \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

$\frac{1}{81} = \frac{1}{9^2} = 9^{-2}$ oder $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$ $\qquad \frac{1}{a^2} = a^{-2}$

(5) $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$ $\qquad 144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$ $\qquad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10$ $\qquad 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$ $\qquad 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

(6) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt{12} = 12^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$

(7) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$ $\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{8}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^1 = \frac{5}{2}$ $\qquad \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$

Man erkennt, wie man sich in manchen Fällen helfen kann,
wenn man das Ergebnis nicht sofort weiß.

2 Zwei Regeln zum Multiplizieren von Potenzen

(1) $\boxed{2^4 \cdot 2^3} = ?$ Hier werden zwei **Potenzen mit derselben Basis** multipliziert.

Schreibt man sich diese Aufgabe ausführlich auf, erkennt man sofort die Regel:

$$2^4 \cdot 2^3 = \overbrace{\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{2^4}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{2^3}}^{7\text{ Faktoren}} = 2^7$$

4 Zweier und 3 Zweier ergeben 7 Zweier.

Die Regel heißt also: **Addiere die Exponenten**: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ Gleiche Basis $\boxed{\text{Mu1}}$

Weitere Beispiele:

$3^5 \cdot 3^3 = 3^8$,	$10^2 \cdot 10^3 = 10^5$	$2 \cdot 2^7 = 2^8$
$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^7 = 3^{13}$,	$9^4 \cdot 9 = 9^5$	$a^2 \cdot a^7 = a^9$

(2) $\boxed{2^4 \cdot 3^4} = ?$ Hier werden zwei **Potenzen mit demselben Exponenten** multipliziert.

Durch einen kleinen Umformungstrick erkennt man die Regel:

$$2^4 \cdot 3^4 = (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3) = (2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3) = 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 6^4$$

Man darf ja beim Multiplizieren die Reihenfolge der Faktoren ändern.

Also erhält man $\boxed{2^4 \cdot 3^4 = (2\cdot 3)^4} = 6^4$.

Die Regel heißt also: **Multipliziere die Basen:** $\boxed{a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n}$ Gleicher Exponent $\boxed{\text{Mu2}}$

Weitere Beispiele:

$2^5 \cdot 5^5 = 10^5$	$3^2 \cdot 4^2 = 12^2$	$4^3 \cdot 7^3 = 28^3$
$3^3 \cdot 2^3 = 6^3$	$r^4 \cdot s^4 = (rs)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 6^5 = 3^5$

(3) $\boxed{2^3 \cdot 5^4} = ?$ Diese Potenzen haben **verschiedene Basen und Exponenten**.

Hier gibt es keine sinnvolle Regel. Man kann sich in manchen Fällen ein Ergebnis in Form einer Potenz zusammenbasteln. Aber wozu?!

Ein Beispiel zeige ich: $2^5 \cdot 4^2 = 2^5 \cdot 4 \cdot 4 = 2^5 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^9$

Das klappt hier, weil man 4 auch als Zweierpotenz darstellen kann.

(4) Die Regeln $\boxed{\text{Mu1}}$ und $\boxed{\text{Mu2}}$ gelten auch für negative Exponenten:

Zuerst wende ich die Formel an, dann berechne ich das Ergebnis auf andere Art.

$\boxed{\text{Mu1}}$: Gleiche Basis

$\boxed{3^2 \cdot 3^{-1} = 3^{2+(-1)}} = 3^{2-1} = 3^1 = 3$ Formel: Die Exponenten wurden addiert.

Andere Berechnung: $3^2 \cdot \boxed{3^{-1}} = 9 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = \frac{9}{3} = 3$ Gleiches Ergebnis !

$\boxed{2^8 \cdot 2^{-5} = 2^{8+(-5)} = 2^{8-5}} = 2^3 = 8$ Formel: Die Exponenten wurden addiert.

Andere Berechnung: $2^8 \cdot 2^{-5} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot \cancel{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}}{\cancel{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}} = 8$

$\boxed{5^{-4} \cdot 5^{-2} = 5^{-4-2}} = 5^{-6}$ andererseits: $5^{-4} \cdot 5^{-2} = \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5^4 \cdot 5^2} = \frac{1}{5^6} = 5^{-6}$,

denn im Nenner stehen keine negativen Exponenten, also gilt dort die Formel.

$\boxed{\text{Mu2}}$:
Gleicher Exponent

$2^{-3} \cdot 5^{-3} = 10^{-3}$ Formel: Die Basen wurden multipliziert.

Andere Berechnung: Man schreibt jeden Faktor als Bruch und multipliziert

die Brüche: $2^{-3} \cdot 5^{-3} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{1}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

$4^{-2} \cdot 3^{-2} = 12^{-2}$ Formel: Die Basen wurden multipliziert.

Andere Berechnung: $4^{-2} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{4^2 \cdot 3^2} = \frac{1}{12^2} = 12^{-2}$

$a^{-r} \cdot b^{-r} = (ab)^{-r}$ andererseits: $= \frac{1}{a^r} \cdot \frac{1}{b^r} = \frac{1}{a^r \cdot b^r} = \frac{1}{(ab)^r} = (ab)^{-r}$

(5) Die Regeln $\boxed{\text{Mu1}}$ und $\boxed{\text{Mu2}}$ gelten auch für Bruch-Exponenten:

Links wende die Formel mit Brüchen an - Rechts berechne das Ergebnis auf andere Art.

$\boxed{\text{Mu1}}$:
Gleiche Basis

$\boxed{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = 3^1 = 3$ Formel: Die Exponenten wurden addiert.

Andere Berechnung: $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

$\boxed{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{2}{3}}$ *(Noch zu schwer?)*

Linke Seite: $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$

Rechte Seite: $2^{\frac{2}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

$\boxed{\text{Mu2}}$:
Gleicher Exponent

$2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}}$ bzw. $2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$

$4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}$ bzw. $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \boxed{= 2}$

MERKE:

Für die Multiplikation von Potenzen hast du zwei Regeln.
Wenn die **Basis gleich** ist, addiere die Exponenten, lasse die Basis.
Wenn der **Exponent gleich** ist, multipliziere die Basen, lasse den Exponenten.

Übungen

(8) Schreibe das Ergebnis als Potenz und berechne das Ergebnis.

a) $2^4 \cdot 2^2$ b) $3^4 \cdot 3^{-2}$ c) $5^{-2} \cdot 5^3$ d) $8^3 \cdot 8^{-4}$

e) $4^3 \cdot 4^{-3}$ f) $2^{-5} \cdot 2^3$ g) $2^{-3} \cdot 2^6$ h) $3^{-1} \cdot 3^{-3} \cdot 3^5$

(9) Schreibe das Ergebnis als Potenz und berechne das Ergebnis.

a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $5^{-2} \cdot 2^{-2}$ c) $3^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$ d) $7^{-1} \cdot 2^{-1}$

(10) Schreibe das Ergebnis als Potenz und berechne das Ergebnis.

a) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}}$ c) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{4}{3}}$ d) $4^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$!!!

Lösungen:

(8) Schreibe das Ergebnis als Potenz und berechne das Ergebnis.

a) $2^4 \cdot 2^2 = 2^6 = 64$

b) $3^4 \cdot 3^{-2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$

c) $5^{-2} \cdot 5^3 = 5^{-2+3} = 5^1 = 5$

d) $8^3 \cdot 8^{-4} = 8^{3-4} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

e) $4^3 \cdot 4^{-3} = 4^{3-3} = 4^0$

Andererseits ist $4^3 \cdot 4^{-3} = 4^3 \cdot \frac{1}{4^3} = 64 \cdot \frac{1}{64} = 1$

Daher ist $\boxed{4^0 = 1}$

f) $2^{-5} \cdot 2^3 = 2^{-5+3} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

g) $2^{-3} \cdot 2^6 = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$

h) $3^{-1} \cdot 3^{-3} \cdot 3^5 = 3^{-1-3+5} = 3^1 = 3$

(9) Schreibe das Ergebnis als Potenz und berechne das Ergebnis.

a) $2^4 \cdot 3^4 = 6^4 = 36 \cdot 36 = 1296$

b) $5^{-2} \cdot 2^{-2} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

c) $3^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^6 = 1^6 = 1$

d) $7^{-1} \cdot 2^{-1} = 14^{-1} = \frac{1}{14}$

(10) Schreibe das Ergebnis als Potenz und berechne das Ergebnis.

a) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 7^1 = 7$

Andererseits ist $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$

b) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 5^2 = 25$

c) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

d) $4^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{6}} = 4^{\frac{1}{6}+\frac{2}{6}} = 4^{\frac{3}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Berechnung von $3^{\frac{5}{2}}$ mit einem Trick

Wir haben zuvor die Multiplikationsregel **Mu1** kennengelernt: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Diese kann man auch in umgekehrter Richtung anwenden: $\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$.

Das kommt beispielsweise zum Einsatz, wenn man $3^{\frac{5}{2}}$ berechnen soll:

1. Schritt: Zerlege den Bruch so: $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

Dann folgt: $3^{\frac{5}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}}$

2. Schritt: Nun wende die Regel **Mu1** in umgekehrter Richtung an:

Das ergibt: $3^{\frac{5}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

3. Schritt: Schreibe $3^{\frac{1}{2}}$ als Wurzel

Dann lautet die ganze Rechnung so: $3^{\frac{5}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 9 \cdot \sqrt{3}$

Weitere Beispiele:

a) $x^{\frac{3}{2}} = \boxed{x^{1+\frac{1}{2}} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = x \cdot \sqrt{x}$

b) $2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$

Übrigens erkennt man hieraus $2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2$

Umgekehrt folgt daraus: $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{3}\cdot 2} = 2^{\frac{2}{3}}$. Diese Potenzregel folgt auf Seite 17.

c) $12^{\frac{5}{2}} = 12^{2+\frac{1}{2}} = 12^2 \cdot 12^{\frac{1}{2}} = 144 \cdot \sqrt{12}$

Man kann hier noch teilweise die Wurzel ziehen: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Dann lautet die ganze Rechnung $12^{\frac{5}{2}} = 12^{2+\frac{1}{2}} = 12^2 \cdot 12^{\frac{1}{2}} = 144 \cdot \sqrt{12} = 144 \cdot 2\sqrt{3} = 288\sqrt{3}$

Berechnung von $3^{-\frac{5}{2}}$ mit einem Trick

1. Schritt: Der negative Exponent erzeugt einen Bruch: $3^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{5}{2}}}$

2. Schritt Erweitern mit $3^{\frac{1}{2}}$, damit im Nenner der Bruchexponent verschwindet:

$$3^{-\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{1}{3^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^3}} = \frac{\sqrt{3}}{27} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{27}\sqrt{3}$$

Oder so: $$3^{-\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{1}{3^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3^{2+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}} = \underbrace{\frac{1}{9 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}}_{\text{Nenner ohne Wurzel!}} = \frac{\sqrt{3}}{27}$$

3 Zwei Regeln zum Dividieren von Potenzen

(1) $\boxed{\frac{2^5}{2^2} = ?}$ Hier werden zwei **Potenzen mit derselben Basis** dividiert.

Man erkennt sofort die Regel:

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot \cancel{2\cdot 2}}{\cancel{2\cdot 2}} = 2^3$$

Aus 5 *Zweiern werden 2 Zweier weggekürzt, bleiben 3 Zweier.*

Die Regel heißt also: **Subtrahiere die Exponenten**: $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ Gleiche Basis $\boxed{\text{Dv1}}$

Beispiele: $\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$, $\frac{10^2}{10^3} = 10^{2-3} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ $\frac{4^3}{4^7} = 4^{3-7} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4}$

Man kann auch im Nenner subtrahieren, dann aber in umgekehrter Reihenfolge. Dann hat man durch den Zählerterm gekürzt!

Beispiele: $\frac{10^2}{10^3} = \frac{1}{10^{3-2}} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$ $\frac{4^3}{4^7} = \frac{1}{4^{7-3}} = \frac{1}{4^4}$

Aus der Formel **Dv1** erhält man auch die Erklärung, warum $\boxed{a^0 = 1}$ gilt:

Wendet man die Regel an, erhält man $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$: Kürzt man, erhält man $\frac{a^n}{a^n} = 1$!!!

---

(2) $\boxed{\frac{2^4}{3^4} = ?}$ Hier werden zwei **Potenzen mit demselben Exponenten** dividiert.

Durch einen kleinen Umformungstrick erkennt man die Regel:

$$\frac{2^4}{3^4} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Also erhält man $\boxed{\frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4}$.

Die Regel heißt also: **Dividiere die Basen:** $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$ Gleicher Exponent $\boxed{\text{Dv2}}$

Beispiele:

$$\boxed{\frac{6^3}{10^3} = \left(\frac{6}{10}\right)^3} = \boxed{\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}} = \frac{27}{125} \qquad \frac{12^5}{6^5} = \left(\frac{12}{6}\right)^5 = 2^5 = 32$$

$$\boxed{\frac{3^6}{6^6} = \left(\frac{3}{6}\right)^6} = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6}} = \frac{1}{64} \qquad \boxed{\frac{18^3}{12^3} = \left(\frac{18}{12}\right)^3} = \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3}} = \frac{27}{8}$$

Hast du gesehen, dass ich oft die Regel **Dv2** zweimal in derselben Rechnung angewandt habe? Zuerst erzeuge ich die Potenz eines Bruches, den ich dann kürze: $\frac{6^3}{10^3} = \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3$. Dann zerlege ich mit **Dv2** wieder in einen Bruch aus zwei Potenzen, damit ich das Ergebnis berechnen kann: $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

(3) Die Regeln Dv1 und Dv2 gelten auch für negative Exponenten:

Zuerst wende ich die Formel versuchsweise auf negative Exponenten an, dann berechne ich das Ergebnis auf andere Art.

Dv1: Gleiche Basis

$\frac{3^2}{3^{-1}} = ?$

Berechnungsversuch mit Formel: Die Exponenten werden subtrahiert.

$$\boxed{\frac{3^2}{3^{-1}} = 3^{2-(-1)} = 3^{2+1}} = 3^3 = 27$$

Berechnung ohne die Formel: $\frac{3^2}{3^{-1}} = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 9 \cdot 3 = 27$ (Mult. mit dem Kehrwert)

$\frac{3^{-2}}{3^2} = ?$

Berechnungsversuch mit Formel: Die Exponenten werden subtrahiert.

$$\boxed{\frac{3^{-2}}{3^2} = 3^{-2-2} = 3^{-4}} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

Berechnungsversuch ohne die Formel: $\boxed{\frac{3^{-2}}{3^2} = \frac{\frac{1}{3^2}}{3^2} = \frac{\frac{1}{9}}{9}} = \frac{1}{9 \cdot 9} = \frac{1}{81}$

$\frac{2^{-5}}{2^{-3}} = ?$

Berechnungsversuch mit Formel: Die Exponenten werden subtrahiert.

$$\boxed{\frac{2^{-5}}{2^{-3}} = 2^{-5-(-3)} = 2^{-5+3}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Berechnung ohne die Formel: $\boxed{\frac{2^{-5}}{2^{-3}} = \frac{\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{2^3}}} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{2^3}{1} = \boxed{\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Im roten Kasten wurde **Dv2** für positive Exponenten angewandt.

Dv2: Gleicher Exponent

$\frac{3^{-2}}{2^{-2}} = ?$

Berechnungsversuch mit Formel: Die Exponenten werden subtrahiert.

$$\boxed{\frac{3^{-2}}{2^{-2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}} = \boxed{\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{2^2}}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Im blauen Kasten habe ich versuchsweise mit **Dv2** und negativen Zahlen gerechnet. Dann habe ich den negativen Exponenten in einen Bruch verwandelt. Dann wurde im roten Kasten **Dv2** auf positive Zahlen angewandt. Dann wird der Kehrwert angeschrieben…

Berechnung ohne die Formel: $\boxed{\frac{3^{-2}}{2^{-2}} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{2^2}}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{9}$

Man sieht, dass die zweite Berechnung hier schneller geht.

(4) Die Regeln $\boxed{Dv1}$ und $\boxed{Dv2}$ gelten auch für Bruch-Exponenten:

Zuerst wende ich die Formel versuchsweise auf negative Exponenten an, dann berechne ich das Ergebnis auf andere Art.

$\boxed{Dv1}$: Gleiche Basis

$\frac{3}{3^{\frac{1}{2}}} = ?$ Berechnungsversuch mit Formel: Die Exponenten werden subtrahiert.

$$\boxed{\frac{3}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{1-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}$$

Berechnung ohne die Formel: $\boxed{\frac{3}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Steht im Nenner eine Wurzel, macht man gerne den Nenner rational, das geht z. B so, dass man mit $\sqrt{3}$ erweitert (rot). Dann fällt die Wurzel im Nenner weg: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$, und schließlich wird noch gekürzt.

ERKENNTNIS: Man kann die Aufgabe $\frac{3}{\sqrt{3}} = ?$ auf drei Arten lösen:

1. Durch Erweitern: $\boxed{\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}}$.

2. Durch Kürzen: $\boxed{\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}}$

2. Durch Potenzrechnen: $\boxed{\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3^1}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{1-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}}$

Weitere Beispiele:

$\boxed{\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[6]{2}$ $\quad \boxed{\frac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}} = 5^1 = 5$ $\quad \boxed{\frac{4^2}{4^{\frac{5}{3}}} = 4^{2-\frac{5}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$

$\boxed{Dv2}$: Gleicher Exponent

$\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = ?$ Berechnungsversuch mit Formel: Man dividiert die Basen.

$$\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Die Rechnung ohne Verwendung der Formel liefert dasselbe Ergebnis:

$\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ mit der passenden Wurzelregel.

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{32^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2}{32}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

Oder gleich so: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

Übungen

(11) Berechne nach der Potenzregel aber auch auf andere Weise.

a) $\frac{3^6}{3^2}$ b) $\frac{2^3}{2^8}$ c) $\frac{5^2}{5^{-1}}$ d) $\frac{4^{-2}}{4}$ e) $\frac{5^{-2}}{5^{-3}}$

f) $\frac{8^{-3}}{8^{-2}}$ g) $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}$ h) $\frac{3^3}{3^{\frac{1}{2}}}$ i) $\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{-\frac{1}{2}}}$ k) $\frac{4^{\frac{5}{2}}}{4^{\frac{3}{2}}}$

(12) Berechne:

a) $\frac{5^3}{2^3}$ b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ c) $\frac{3^{-2}}{9^{-2}}$ d) $\frac{8^4}{4^4}$ e) $\frac{128^{-\frac{1}{3}}}{2^{-\frac{1}{3}}}$

Die Lösungen findest du auf der nächsten Seite.

Lösungen

(11) Berechne nach der Potenzregel aber auch auf andere Weise.

a) $\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4 = 81$

b) $\frac{2^3}{2^8} = 2^{3-8} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ oder: $\frac{2^3}{2^8} = \frac{1}{2^{8-3}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

c) $\frac{5^2}{5^{-1}} = 5^{2-(-1)} = 5^3 = 125$

d) $\frac{4^{-2}}{4} = 4^{-2-1} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ oder: $\frac{4^{-2}}{4} = \frac{1}{4^{1-(-2)}} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

e) $\frac{5^{-2}}{5^{-3}} = 5^{-2-(-3)} = 5^{-2+3} = 5^1 = 5$

f) $\frac{8^{-3}}{8^{-2}} = 8^{-3-(-2)} = 8^{-3+2} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$ oder; $\frac{8^{-3}}{8^{-2}} = \frac{1}{8^{-2-(-3)}} = \frac{1}{8^{-2+3}} = \frac{1}{8}$

g) $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}-1} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder ganz einfach $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

h) $\frac{3^3}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{3-\frac{1}{2}} = \boxed{3^{\frac{5}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 9 \cdot \sqrt{3}}$

i) $\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{-\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 5^1 = 5$

k) $\frac{4^{\frac{5}{2}}}{4^{\frac{3}{2}}} = 4^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = 4^1 = 4$

(12) Berechne:

a) $\frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$ oder besser $\frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$ oder gleich so: $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{3^{-2}}{9^{-2}} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$ oder so: $\frac{3^{-2}}{9^{-2}} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{9^2}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{1} = 9$

d) $\frac{8^4}{4^4} = \left(\frac{8}{4}\right)^4 = 2^4 = 16$

e) $\frac{128^{-\frac{1}{3}}}{2^{-\frac{1}{3}}} = \left(\frac{128}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = 64^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$

4 Man kann auch Potenzen potenzieren

Es geht hier um drei Zahlen, die verknüpft werden. Weil man aber immer nur zwei Zahlen auf einmal verknüpfen kann, muss man Klammern setzen. Das kennst du von anderen Rechenarten:

(1) Was soll $20+8+2$ bedeuten?

1. Berechnungsmöglichkeit: $(20+8)+2 = 28+2 = 30$

2. Berechnungsmöglichkeit: $20+(8+2) = 20+10 = 30$!

Wie man erkennt, ist $(20+8)+2 = 20+(8+2)$

Das ist bei der Addition immer so. Man nennt dies das **Assoziativgesetz**.

Weil es egal ist, wie man die Klammern setzt, darf man sie weglassen.

Also kann jeder $20+8+5$ berechnen, wie er möchte, oder wie es günstig ist.

(2) Was soll $20\cdot 8\cdot 2$ bedeuten?

1. Berechnungsmöglichkeit: $(20\cdot 8)\cdot 2 = 160\cdot 2 = 320$

2. Berechnungsmöglichkeit: $20\cdot(8\cdot 2) = 20\cdot 16 = 320$

Wie man erkennt, ist $(20\cdot 8)\cdot 2 = 20\cdot(8\cdot 2)$

Das ist bei der Multiplikation immer so. Man nennt dies das **Assoziativgesetz**.

Weil es egal ist, wie man die Klammern setzt, darf man sie weglassen.

Also kann jeder $20\cdot 8\cdot 5$ berechnen, wie er möchte, oder wie es günstig ist.

(3) Was soll $20-8-2$ bedeuten?

1. Berechnungsmöglichkeit: $(20-8)-2 = 12-2 = 10$

2. Berechnungsmöglichkeit: $20-(8-2) = 20-6 = 14$

Wie man erkennt, ist $(20-8)-2 \neq 20-(8-2)$

Also ist es nicht egal, wie man rechnet. Daher haben die Mathematiker eine Vereinbarung getroffen: Man soll $20-8-5$ immer auf die 1. Art berechnen, und spart so Klammern:

$$20-8-2 := (20-8)-2$$

(4) **Nun zum Potenzieren von 3 Zahlen**: **Was soll** 2^{3^2} **bedeuten?**

1. Berechnungsmöglichkeit: $\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$

2. Berechnungsmöglichkeit: $2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512$

Wie man erkennt, ist $\left(2^3\right)^2 \neq 2^{\left(3^2\right)}$

Also ist es nicht egal, wie man rechnet. Daher haben die Mathematiker eine Vereinbarung getroffen: Man soll 2^{3^2} immer auf die 1. Art berechnen und spart so Klammern:

$$2^{3^2} := \left(2^3\right)^2$$

Beispiele: $2^{-2^3} = \left(2^{-2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$, $\quad 3^{3^{-1}} = \left(3^3\right)^{-1} = 27^{-1} = \frac{1}{27}$

Es gibt ein wichtiges Rechengesetz für das Potenzieren von Potenzen

Dazu berechne ich $\left(3^3\right)^2$ auf eine spezielle Art: $\left(3^3\right)^2 = 3^3 \cdot 3^3 = 3^{3+3} = 3^{3\cdot 2} = 3^6$

Also ist doch: $\boxed{\left(3^3\right)^2 = 3^{3\cdot 2} = 3^6}$

Noch ein Beispiel: $\left(2^3\right)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$

Also ist doch: $\boxed{\left(2^3\right)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}}$

Noch ein Beispiel: $\left(5^6\right)^3 = 5^6 \cdot 5^6 \cdot 5^6 = 5^{6+6+6} = 5^{6\cdot 3} = 5^{18}$

Also ist doch: $\boxed{\left(5^6\right)^3 = 5^{6\cdot 3} = 5^{18}}$

Allgemeine Regel: **Wird eine Potenz potenziert, dann werden die Exponenten multipliziert.**

$$\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}} \qquad \boxed{\text{Pot1}}$$

Es gibt noch eine wichtige Regel: $\boxed{\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m}$ $\boxed{\text{Pot2}}$

Denn für die linke Seite gilt $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$, für die rechte Seite: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$.

Und wegen $m \cdot n = n \cdot m$ stimmt die Regel **Pot2.**

Beispiele mit negativen Exponenten:

a) $\left(2^3\right)^{-1} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ Anders berechnet: $\left(2^3\right)^{-1} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

b) $\left(3^{-4}\right)^{-1} = 3^4 = 81$ Anders berechnet: $\left(3^{-4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{3^4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{81}\right)^{-1} = 81$

c) $\boxed{\left(4^{-3}\right)^2 = 4^{-6} \overset{\text{Trick}}{=} \left(2^2\right)^{-6} = 2^{-12}} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{1024\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{4096}$

Hier habe ich die 4 durch 2^2 ersetzt, denn dann folgt $4^{-6} = 2^{-12}$. Das hilft mir, wenn ich $2^{10} = 2024$ auswendig weiß. Dann ist $2^{12} = 2^{10} \cdot 2 \cdot 2 = 4096$

Beispiele mit Bruchexponenten:

a) $\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{Pot2}}{=} \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$ Hier ist die Regel **Pot2** sehr wichtig.

Dann damit komme man zu $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \overset{\text{Pot 2}}{=} \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Andererseits ist

$\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{8}$. Also haben wir hier gesehen: $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$!!!

Das Rechnen mit Wurzeln wird oft durch die Potenzrechnung einfacher.

Das folgende Beispiel schließt an b) an:

c) Berechne bzw. vereinfache $\sqrt[6]{8}$.

$$\sqrt[6]{8} = 8^{\frac{1}{6}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{3\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad !!!$$

Der Trick dabei ist das Ersetzen von 8 durch die Zweierpotenz 2^3.
Dann kann man vereinfachen.

d) Berechne bzw. vereinfache $\sqrt[4]{80}$ mittels Potenzen.

$$\sqrt[4]{80} = 80^{\frac{1}{4}} = (16\cdot 5)^{\frac{1}{4}} \overset{\text{Mu 2}}{=} 16^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{5} = 2\cdot\sqrt[4]{5}$$

Nun haben wir aus 80 partiell die 4. Wurzel gezogen, was die blauen Zahlen zeigen.

Dies soll hier nicht weiter vertieft werden. Dieser Text soll eine Einführung geben.
Weiterführende Aufgaben findet man in den Texten 12300 bis 12321 der Mathe-CD.

Übungen dazu

(13) Berechne mit der Potenzregel – und ohne diese.

a) $\left(3^2\right)^2$ b) $\left(2^{-3}\right)^2$ c) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$ d) $\left(5^3\right)^{\frac{1}{3}}$

e) $\left(8^{-2}\right)^{-1}$ f) $\left(12^4\right)^{-\frac{1}{2}}$ g) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^5$ h) $\left(9^3\right)^{\frac{1}{2}}$

(14) Ersetze die Basis durch eine Potenz und vereinfache dann.

a) $4^{\frac{1}{4}}$ b) $27^{\frac{1}{6}}$ c) $64^{\frac{1}{3}}$ d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$

Lösungen

(13) Berechne mit der Potenzregel – und ohne diese.

a) $\left(3^2\right)^2 = 3^{2\cdot 2} = 3^4 = 81$ oder: $\left(3^2\right)^2 = 9^2 = 81$

b) $\left(2^{-3}\right)^2 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ oder: $\left(2^{-3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

c) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 4^{\frac{3}{2}} = 4^{1+\frac{1}{2}} = 4^1\cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4\cdot\sqrt{4} = 4\cdot 2 = 8$ oder: $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \sqrt{4}^3 = 2^3 = 8$

d) $\left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{3\cdot\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$ oder: $\left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

e) $\left(8^{-2}\right)^{-1} = 8^{(-2)\cdot(-1)} = 8^2 = 64$ oder $\left(8^{-2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{8^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{64}\right)^{-1} = 64$

f) $\left(12^4\right)^{-\frac{1}{2}} = 12^{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$ Ohne Potenzregel zu schwer.

g) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$ oder: $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^5 = 2^5 = 32$

h) $\left(9^3\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$ Ohne Potenzregel sehr ungünstig.

(14) Ersetze die Basis durch eine Potenz und vereinfache dann.

a) $4^{\frac{1}{4}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{2\cdot\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

b) $27^{\frac{1}{6}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{3\cdot\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

c) $64^{\frac{1}{3}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{6\cdot\frac{1}{3}} = 2^2 = 4$

d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3} = \left(2^{-3}\right)^{-3} = 2^{(-3)\cdot(-3)} = 2^9 = 512$

5 Nicht einfache Übungen für Fortgeschrittene

(15) Zeige, dass die folgenden Ergebnisse richtig sind.

a) $5^{\frac{9}{2}} = ... = 625\sqrt{5}$

b) $2^{-\frac{3}{2}} = ... = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

c) $20^{\frac{3}{2}} = ... = 40\sqrt{5}$

d) $24^{\frac{4}{3}} = ... = 48 \cdot \sqrt[3]{3}$

e) $36^{-\frac{3}{4}} = ... = \frac{1}{36}\sqrt{6}$

f) $81^{\frac{4}{3}} = ... = 243 \cdot \sqrt[3]{3}$

g) $81^{-\frac{4}{3}} = ... = \frac{\sqrt[3]{9}}{729}$

h) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = ... = x \cdot \sqrt[12]{x^5}$

i) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{8} = ... = 4 \cdot \sqrt[6]{32}$

j) $\frac{16}{\sqrt[3]{32}} = ... = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$

Lösungen

(11)

a) $5^{\frac{9}{2}} = 5^{4+\frac{1}{2}} = 5^4 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 625\sqrt{5}$

b) $2^{-\frac{3}{2}} = \underbrace{\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}}_{\text{erweitern}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

c) $20^{\frac{3}{2}} = (4\cdot 5)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 4^{1+\frac{1}{2}} \cdot 5^{1+\frac{1}{2}} = \underbrace{4 \cdot \sqrt{4} \cdot 5}_{4\cdot 2\cdot 5} \cdot \sqrt{5} = 40\sqrt{5}$

oder $20^{\frac{3}{2}} = 20^{1+\frac{1}{2}} = 20 \cdot 20^{\frac{1}{2}} = 20 \cdot \sqrt{20} = 20 \cdot \sqrt{4\cdot 5} = 20 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 20 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 40\sqrt{5}$

d) $24^{\frac{4}{3}} = 24^{1+\frac{1}{3}} = 24 \cdot 24^{\frac{1}{3}} = 24 \cdot \sqrt[3]{24} = 24 \cdot \sqrt[3]{8\cdot 3} = 24 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 24 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} = 48 \cdot \sqrt[3]{3}$

e) $36^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{36^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\left(6^2\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{6^{2\cdot\frac{3}{4}}} = \frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} = \frac{1\cdot 6^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{3}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{6^2} = \frac{\sqrt{6}}{36} = \frac{1}{36}\sqrt{6}$

f) $81^{\frac{4}{3}} = 81^{1+\frac{1}{3}} = 81 \cdot 81^{\frac{1}{3}} = 81 \cdot \sqrt[3]{81} = 81 \cdot \sqrt[3]{27\cdot 3} = 81 \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 81 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} = 243 \cdot \sqrt[3]{3}$

oder: $81^{\frac{4}{3}} = \left(3^4\right)^{\frac{4}{3}} = 3^{4\cdot\frac{4}{3}} = 3^{\frac{16}{3}} = 3^{5+\frac{1}{3}} = 3^5 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 243 \cdot \sqrt[3]{3}$!!!

g) $81^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{81^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{2}{3}}} = \frac{81^{\frac{2}{3}}}{81^2} =$ führt zu großen Zahlen. Besser:

$81^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\left(3^4\right)^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{3^{\frac{16}{3}}} \cdot \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{16}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^6} = \frac{\sqrt[3]{9}}{729}$ denn $3^{\frac{2}{3}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

h) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}} = x^{\frac{17}{12}} = x^{1+\frac{5}{12}} = x^1 \cdot x^{\frac{5}{12}} = x \cdot \sqrt[12]{x^5}$

i) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{8} = 16^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{8}{6}+\frac{9}{6}} = 2^{\frac{17}{6}} = 2^{2+\frac{5}{6}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{5}{6}}$

$= 4 \cdot \sqrt[6]{2^5} = 4\sqrt[6]{32}$

j) $\frac{16}{\sqrt[3]{32}} = \frac{2^4}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{2^4}{\left(2^5\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^4}{2^{\frac{5}{3}}} = 2^{4-\frac{5}{3}} = 2^{\frac{7}{3}} = 2^{2+\frac{1}{3}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$