Keine Ahnung von Quadratwurzeln

Was sind

Quadratwurzeln

?

Datei Nr. 12200

Stand 24. März 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Rechnen mit Wurzeln fällt vielen schwer, hier gibt es Gelegenheiten zur Wiederholung.
Dieser „Keine-Ahnung-Text“ ist ein Auszug aus dem umfangreichen Einführungstext 12201 in das Quadratwurzel-Rechnen. Kompakt und ohne Übungsaufgaben (die stehen reichlich in 12201).
Daneben gibt es noch die Einführung in das Rechnen mit Wurzeln im Stile zweier Schulstunden (12198 und 12199).

Inhalt

1 Was sind Quadratwurzeln? 3

2 Quadrieren von Quadratwurzeln 4

3 Rechnen mit Quadratwurzeln 5

1. Addieren und Subtrahieren von Wurzeln 5
2. Multiplikation von Wurzeln 5
3. Partiell die Wurzel ziehen 5
4. Division von Wurzeln 6
   Den Nenner rational machen 6
5. Anwenden binomischer Formeln auf Wurzeln 8
6. Den Nenner mit der 3. binomischen Formel rational machen 9

7 Wurzeln potenzieren 10

1 Was sind Quadratwurzeln

Die Mathematik ist in vielen Fällen in der Lage, Rechenoperationen wieder rückgängig zu machen.

Die Addition macht man durch eine Subtraktion rückgängig: $3\boxed{+5}=8 \Rightarrow 8\boxed{-5}=3$

und eine Multiplikation durch eine Division: $3\boxed{\cdot 5}=15 \Rightarrow 15\boxed{:5}=3$,

Quadrieren kann man in vielen Fällen durch „Ziehen einer Quadratwurzel" rückgängig machen.
Dabei taucht aber ein Problem auf:

$2 \xrightarrow[\text{quadr.}]{} 4$ rückgängig: $4 \xrightarrow[\text{Umkehrung: Wurzel ziehen}]{} 2$ Man schreibt: $\sqrt{4}=2$

$-2 \xrightarrow[\text{quadr.}]{} 4$ rückgängig: $4 \xrightarrow[\text{Umkehrung: Wurzel ziehen}]{} \cancel{-2}$ also nicht $\cancel{\sqrt{4}=-2}$

Man muss sich also merken, dass man das Quadrieren von negativen Zahlen <u>nicht</u> durch Wurzelziehen rückgängig machen kann.

<u>Das musst du unbedingt wissen:</u>

1. **Quadrieren ergibt nie eine negative Zahl, sondern nur Zahlen ≥ 0.**
2. **Die Umkehrung (das Ziehen einer Quadratwurzel) ist daher auch nie aus negativen Zahlen möglich: $\sqrt{a}$ geht nur, wenn $a \geq 0$ ist.**
3. **Das Ergebnis, also die <u>Quadratwurzel ist nie eine negative Zahl</u>: $\sqrt{a} \geq 0$**
4. **Achtung: $\sqrt{a^2}=|a|$ Falsch wäre $\sqrt{a^2}=a$, wenn a negativ ist,**
   denn sonst wäre ja z. B. $\cancel{\sqrt{(-2)^2}=-2}$

LERNE DRINGEND AUSWENDIG:

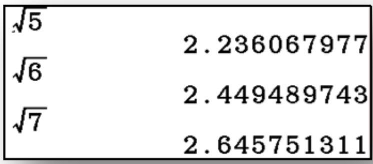
$1^2=1$	also	$\sqrt{1}=1$
$2^2=4$	also	$\sqrt{4}=2$
$3^2=9$	also	$\sqrt{9}=3$
$4^2=16$	also	$\sqrt{16}=4$
$5^2=25$	also	$\sqrt{25}=5$
$6^2=36$	also	$\sqrt{36}=6$
$7^2=49$	also	$\sqrt{49}=7$
$8^2=64$	also	$\sqrt{64}=8$
$9^2=81$	also	$\sqrt{81}=9$
$10^2=100$	also	$\sqrt{100}=10$
$11^2=121$	also	$\sqrt{121}=11$
$12^2=144$	also	$\sqrt{144}=12$
$13^2=169$	also	$\sqrt{169}=13$
$14^2=196$	also	$\sqrt{196}=14$
$15^2=225$	also	$\sqrt{225}=15$
$16^2=256$	also	$\sqrt{256}=16$

2 Quadrieren von Quadratwurzeln

Leider kann man die meisten Wurzeln nicht berechnen:

$\sqrt{4} = 2$ und $\sqrt{9} = 3$. Aber dazwischen sieht es schlecht aus:

$\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ und $\sqrt{8}$ lassen sich nicht genau angeben. Mit Taschenrechnern gelingt es, Näherungswerte zu finden:



aber eines ist dabei sicher: $\sqrt{5}$ ist die Zahl, deren Quadrat 5 ist.

Also gilt: $\sqrt{5}^2 = 5$, $\sqrt{6}^2 = 6$, $\sqrt{7}^2 = 7$ usw.

Quadrieren ist die Umkehrung vom Wurzelziehen:

$\sqrt{5}$ ist diejenige <u>positive</u> Zahl, deren Quadrat 5 ist: $\sqrt{5}^2 = 5$

$\sqrt{6}$ ist diejenige <u>positive</u> Zahl, deren Quadrat 6 ist: $\sqrt{6}^2 = 6$

$\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist diejenige <u>positive</u> Zahl, deren Quadrat $\frac{1}{3}$ ist: $\sqrt{\frac{1}{3}}^2 = \frac{1}{3}$

Also sollte man sich merken:

$\sqrt{a}$ ist diejenige <u>positive</u> Zahl, deren Quadrat a ist: $\sqrt{a}^2 = a$

Und dazu gehört: $\sqrt{a}$ existiert nur dann, wenn $a \geq 0$ ist.

Ist a > 0, dann ist $\sqrt{a} > 0$, Ist a = 0, dann ist $\sqrt{0} = 0$.

$\sqrt{a}^2 = a$ d. h. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

Rechnen mit Quadratwurzeln

1. Das Ziehen einer Wurzel ist nicht mit Addition oder Subtraktion verträglich.

Falsch ist also: $\underbrace{\sqrt{4}+\sqrt{9}}_{2+3=5} = \underbrace{\sqrt{4+9}}_{\sqrt{13}\approx 3,6}$ oder $\underbrace{\sqrt{5}+\sqrt{11}}_{\approx 2,23+3,31} = \underbrace{\sqrt{16}}_{=4}$

Oder $\underbrace{\sqrt{8}-\sqrt{7}}_{\approx 2,83-2,65} = \underbrace{\sqrt{8-7}}_{=\sqrt{1}=1}$

Man kann jedoch <u>Vielfache gleicher Wurzeln</u> addieren und subtrahieren:

$\sqrt{3}+\sqrt{3} = 2\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ Den Malpunkt kann man weglassen.

$4\sqrt{5}+3\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

$8\sqrt{2}-5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2. Für die **Multiplikation von Wurzeln** gibt es diese Regel: $\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b} \quad (P1)}$

Möglich ist also:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{5\cdot 3} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 3} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3}^4 = \underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{3}\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{3} = 9$$

Diese Regel wird auch „von rechts nach links“ angewandt: $\boxed{\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (P2)}$

Damit kann man die Wurzeln aus vielen großen Zahlen durch Faktorisieren berechnen:

$$\sqrt{3600} = \sqrt{36\cdot 100} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{100} = 6\cdot 10 = 60$$

$$\sqrt{196} = \sqrt{4\cdot 49} = \underbrace{\sqrt{4}\cdot\sqrt{49}}_{\text{unnötig}} = 2\cdot 7 = 14$$

$$\sqrt{484} = \sqrt{4\cdot 121} = 2\cdot 11 = 22$$

3. In vielen Fällen kann man die Wurzel nicht komplett ziehen, sondern nur aus einem Faktor:
Man sagt dann: **Die Wurzel wird partiell gezogen**:

$$\sqrt{180} = \sqrt{36\cdot 5} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{5} = 6\cdot\sqrt{5}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{4\cdot 7} = 2\cdot\sqrt{7}$$

$$\sqrt{120} = \sqrt{4\cdot 30} = 2\sqrt{30}$$

Es gibt auch **das doppelte partielle Wurzelziehen**:

$$\sqrt{24}\cdot\sqrt{18} = \sqrt{4\cdot 6}\cdot\sqrt{6\cdot 3} = 2\cdot\underbrace{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}_{6}\cdot\sqrt{3} = 12\cdot\sqrt{3}$$

$$\sqrt{63}\cdot\sqrt{28} = \sqrt{9\cdot 7}\cdot\sqrt{4\cdot 7} = 3\cdot\underbrace{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}_{7}\cdot 2 = 42$$

$$\sqrt{72}\cdot\sqrt{32} = \sqrt{36\cdot 2}\cdot\sqrt{16\cdot 2} = 6\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2} = 24\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{2} = 28$$

4. Für die **Division von Wurzeln** gibt es diese Regel: $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \quad (Q1)}$

Möglich ist also:

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{245}{5}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 49}{5}} = \sqrt{49} = 7$$

$$\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{343}{7}} = \sqrt{49} = 7$$

Diese Regel wird auch „von rechts nach links“ angewandt: $\boxed{\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (Q2)}$

Damit kann man die Wurzeln aus Brüchen durch Zerlegen in zwei Wurzeln berechnen:

$$\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$$

$$\sqrt{\frac{288}{50}} = \sqrt{\frac{\cancel{2} \cdot 144}{\cancel{2} \cdot 25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

$$\sqrt{\frac{147}{75}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 3}{25 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{49}{25}} \overset{Q2}{=} \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

In manchen Fällen benötigt man Q1 und Q2:

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}} \overset{Q1}{=} \sqrt{\frac{50}{8}} \overset{\text{kürzen}}{=} \sqrt{\frac{25}{4}} \overset{Q2}{=} \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} \overset{Q1}{=} \sqrt{\frac{27}{12}} \overset{\text{kürzen}}{=} \sqrt{\frac{9}{4}} \overset{Q2}{=} \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Den Nenner rational machen

Wenn man aus einem Bruch die Wurzel nicht ziehen kann, dann erweitert oder kürzt man den Bruch so, dass man wenigstens <u>aus dem Nenner die Wurzel ziehen</u> kann.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Unter der Wurzel wird mit 3 erweitert, damit im Nenner eine Quadratzahl entsteht.

$$\frac{12}{\sqrt{7}} = \frac{12 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{12}{7} \cdot \sqrt{7}$$

Wichtig sind diese Rechnungen:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2} \quad \text{oder so:} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\cancel{5} \cdot \sqrt{5}}{\cancel{5}} = \sqrt{5} \quad \text{oder so:} \quad \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

In manchen Fällen, sollte man vor dem Erweitern partiell die Wurzel ziehen:

Beispielsweise wenn der Nenner 12 unter der Wurzel steht.

Die schlechte Rechnung sieht so aus:

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5\cdot 12}{12\cdot 12}} = \frac{\sqrt{60}}{12} = \frac{\sqrt{4\cdot 15}}{12} = \frac{2\cdot\sqrt{15}}{12} = \frac{1}{6}\sqrt{15}$$

Das Erweitern mit $\sqrt{12}$ ist zu umständlich!

Die bessere Methode geht anders: Man muss erkennen, dass der Nenner die Quadratzahl 4 als Faktor enthält, also **wird der Nenner vor dem Erweitern zerlegt**:

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5}{\boxed{4}\cdot 3}} = \frac{1}{\boxed{2}}\sqrt{\frac{5\cdot 3}{3\cdot 3}} = \frac{\sqrt{15}}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}\sqrt{15}$$

MERKE: Um einen Nenner rational zu machen, geht man so vor:

1. Man zerlegt zuerst den Nenner in Faktoren.
2. Man erweitert dann mit den Faktoren, die keine Quadratzahlen bilden.
3. Dann kann man die Wurzel teilweise ziehen.

$$\sqrt{\frac{10}{63}} = \sqrt{\frac{10\cdot 7}{\boxed{9}\cdot 7\cdot 7}} = \frac{\sqrt{70}}{\boxed{3}\cdot\underbrace{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}_{7}} = \frac{\sqrt{70}}{3\cdot 7} = \frac{1}{21}\sqrt{70}$$

Es genügt, mit $\sqrt{7}$ zu erweitern.

$$\frac{32}{\sqrt{27}} = \frac{32}{\sqrt{\boxed{9}\cdot 3}} = \frac{32\cdot\sqrt{3}}{\boxed{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{32\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 3} = \frac{32}{9}\sqrt{3}$$

Es genügt, mit $\sqrt{3}$ zu erweitern.

$$\frac{16}{\sqrt{32}} = \frac{16}{\sqrt{16\cdot 2}} = \frac{16\cdot\sqrt{2}}{4\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{2}} = \frac{16\cdot\sqrt{2}}{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Es genügt, mit $\sqrt{2}$ zu erweitern.

Damit man auch Brüche berechnen kann, die im Nenner eine Summe enthalten wie $\frac{7}{3+\sqrt{2}}$ oder $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$, müssen wir lernen, die binomischen Formeln mit Wurzeln zu berechnen.

5. Anwenden der binomischen Formeln auf Wurzeln

Zur Erinnerung: Diese drei binomischen Formeln musst du wissen:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Tipp: Vergiss bei $(a \pm b)^2$ nie das doppelte Produkt $\boxed{2ab}$!!!

(a) $\left(\sqrt{3}+5\right)^2 = \sqrt{3}^2 + \boxed{2\cdot\sqrt{3}\cdot 5} + 5^2 = 3 + 10\sqrt{3} + 25 = 28 + 10\sqrt{3}$ denn $\sqrt{3}^2 = 3$, $\sqrt{5}^2 = 5$

(b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{2}^2 + \boxed{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} + \sqrt{3}^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$ denn $\sqrt{2}^2 = 2$.

Manche Lösungen kann man vereinfachen, wenn man zuvor partiell die Wurzel zieht:

(c) $\left(8-\sqrt{32}\right)^2 = 8^2 - \boxed{2\cdot 8\cdot\sqrt{32}} + \sqrt{32}^2 = 64 - 16\sqrt{32} + 32 = 96 - 16\sqrt{32}$

Nun kann man teilweise die Wurzel ziehen: $\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}$

also folgt: $\ldots = 96 - 16\cdot 4\sqrt{2} = 96 - 64\sqrt{2}$.

Tipp: <u>Ziehe sofort teilweise die Wurzel. Die Rechnung wird einfacher</u> !!!!

$$\left(8-\sqrt{32}\right)^2 = \left(8-4\sqrt{2}\right)^2 = 8^2 - \boxed{2\cdot 8\cdot 4\sqrt{2}} + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 64 - 64\sqrt{2} + 16\cdot 2 = 96 - 64\sqrt{2}$$

Hier trat diese Zwischenrechnung auf: $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = 16\cdot 2 = 32$.

Es gibt Trickaufgaben (die Lehrer gerne stellen), die man ganz einfach lösen kann, wenn man gleich partiell die Wurzel zieht

(d) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$ Zunächst die umständliche Lösung eines “Blinden“:

$\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{12}^2 - 2\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 12 - 2\sqrt{36} + 3 = 15 - 2\cdot 6 = 3$

Nun die Lösung eines Experten: Er beginnt mit $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$:

$$\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Hast du an dieser Stelle etwas dazugelernt?

(e) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{80}\right)^2$ zu nächst umständlich gelöst:

$\left(\sqrt{5}+\sqrt{80}\right)^2 = 5 + \boxed{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{80}} + 80 = 85 + \boxed{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{16\cdot 5}} = 85 + 2\cdot 4\cdot\underbrace{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}_{5} = 85 + 40 = 125$

Besser geht es, wenn man mit $\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = 4\cdot\sqrt{5}$ beginnt:

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{80}\right)^2 = \left(\sqrt{5}+\sqrt{16\cdot 5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}+4\sqrt{5}\right)^2 = \left(5\sqrt{5}\right)^2 = 25\cdot 5 = 125$$

6. Den Nenner mit der 3. binomischen Formel rational machen

a) $\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}$ Man erweitert den Bruch mit $\left(3-\sqrt{2}\right)$, weil dann im Nenner das Produkt $\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$ entsteht. Die 3. binomische Formel vereinfacht dann den Nenner so: $\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=3^2-\sqrt{2}^2=9-2=7$.

Und so sieht die ganze Rechnung aus: $\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{7\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\cancel{7}\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}{\cancel{9-2}}=3-\sqrt{2}$

b) $$\frac{\sqrt{15}}{4-\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)}{\left(4-\sqrt{15}\right)\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)}=\frac{4\sqrt{15}+15}{16-15}=\frac{4\sqrt{15}+15}{1}=4\sqrt{15}+15$$

Hier musste man mit $\left(4+\sqrt{15}\right)$ erweitern um in Nenner mit der 3. binomischen Formel die Wurzeln weg zu bekommen: $\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)=4^2-\sqrt{15}^2=16-15=1$

c) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ Jetzt erweitert man für die 3. binomische Formel mit $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

Damit kann man im Nenner mit der 3. binomischen Formel vereinfachen, während man Im Zähler die 1. binomische Formel benötigt.

Dann lautet die Berechnung ausführlich

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\overbrace{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}^{\text{in 2 Brüche zerlegen}}=\overbrace{\frac{8}{2}+\frac{2\sqrt{15}}{2}}^{\text{und jetzt kürzen}}=4+\sqrt{15}$$

d) $$\frac{5\sqrt{6}}{3\sqrt{6}+2\sqrt{12}}=\frac{5\sqrt{6}\cdot\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{12}\right)}{\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{12}\right)\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{12}\right)}=\frac{15\cdot6-10\cdot\sqrt{72}}{9\cdot6-4\cdot12}=\frac{90-10\cdot\sqrt{36\cdot2}}{54-48}=\frac{90-60\sqrt{2}}{6}$$

Nun führen Einzelbrüche zum Ziel: $=\dfrac{90}{6}-\dfrac{60}{6}\sqrt{2}=15-10\sqrt{2}$

e) $$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}-3}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8}+3\right)}{\left(\sqrt{8}-3\right)\left(\sqrt{8}+3\right)}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{8}+2\sqrt{2}\cdot3}{\sqrt{8}^2-3^2}=\frac{2\sqrt{16}+6\sqrt{2}}{8-9}=\frac{8+6\sqrt{2}}{-1}=-8-6\sqrt{2}$$

(Beim Dividieren durch -1 ändern sich alle Vorzeichen.)

f) $$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}=\frac{3-2\sqrt{3}\sqrt{7}+7}{3-7}=\frac{10-2\sqrt{21}}{-4}=-\frac{10}{4}+\frac{2}{4}\sqrt{21}=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$$

Am besten zerlegt man diesen Term in zwei einzelne Brüche damit man kürzen kann!

7 Wurzeln potenzieren

a) $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^3 \cdot 2^3} = 2^3$ Erkenntnis: $\sqrt{2^6} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{2}} = 2^3$

b) $\sqrt{2^{10}} = \sqrt{2^5 \cdot 2^5} = 2^5$ $\sqrt{2^{10}} = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^5$

c) $\sqrt{3^{14}} = \sqrt{3^7 \cdot 3^7} = 3^7$ $\sqrt{3^{14}} = \left(3^{14}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^7$

Beobachtung: Die Wurzel aus einer Potenz halbiert den Exponenten.

Also kann man $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ verwenden und die Lösung auch so finden:

Wenn der Exponent ungerade ist, dann kann man wenigstens teilweise die Wurzel ziehen:

d) $\sqrt{2^7} = \sqrt{2^6 \cdot 2} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{2} = 2^3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

e) $\sqrt{243} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \cdot 3} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

f) $\sqrt{5^5} = \sqrt{5^4 \cdot 5} = 5^2\sqrt{5} = 25\sqrt{5}$.

Was ist der <u>Unterschied</u> zwischen $\sqrt{2^6}$ und $\sqrt{2}^6$?

$$\sqrt{2^6} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{6\cdot\frac{1}{2}} = 2^3 = 8 \quad \text{und} \quad \sqrt{2}^6 = \underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{2} = 2^3 = 8$$

Es ist dasselbe! Das zeigt schon die Potenzregel fürs Potenzieren:

$\sqrt{2^6} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{6\cdot\frac{1}{2}}$ und andererseits: $\sqrt{2}^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}$.

Weil man im Produkt die Faktoren vertauschen darf, gilt das bei der des Potenzierens auch:

$$\sqrt{2^6} = \sqrt{2}^6$$

Noch eine Warnung für Fortgeschrittene

Wenn man mit Wurzelfunktionen arbeitet, dann ist die Gleichung

$$\sqrt{x^n} = \sqrt{x}^n$$

<u>nicht mehr allgemeingültig</u>. Das liegt daran, dass im Falle von negativen x-Werten der Radikand von $\sqrt{x}^n$ nicht mehr definiert ist, die linke Seite aber bei geradem n durchaus berechenbar ist.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x^4} \Rightarrow f(-2) = \sqrt{(-2)^4} = \sqrt{+16} = 4$

Aber $f(x) = \sqrt{x}^4 \Rightarrow f(-2) = \underbrace{\sqrt{(-2)}}_{\substack{\text{nicht}\\\text{definiert}}}^4 = \cancel{\sqrt{+16} = 4}$