Schulstunde

Wie löst man lineare Gleichungssysteme?

Ein Text von

Friedrich Buckel

Datei Nr. 12178

23. Januar 2023

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Am Anfang einer Unterrichtsstunde begrüße ich alle anwesenden Schüler und neuerdings auch die abwesenden, die dennoch teilnehmen und zwar online, oder die das lesen, was ich aufschreibe.

Also willkommen beim Thema „Gleichungssysteme"!

1. Zu Beginn einer Stunde

soll man zeigen, worum es geht. **Gleichungen** kennt jeder. Diese begegnen einem schon ganz früh.
Gleichungen können eine Unbekannte enthalten wie $x+3=7$ oder $3\cdot y=15$.
Die Buchstaben x und y nennt man auch **Variable** oder **Platzhalter**.

Wenn du eine solche Gleichung lösen sollst, dann heißt das:
„Suche eine Zahl mit der Eigenschaft, dass Sie beim Ersetzen der Unbekannten eine Rechnung ergibt, die „stimmt".

Die Lösung der Gleichung $x+3=7$ ist die Zahl 4, denn $\boxed{4}+3=7$ ist eine **wahre Aussage**.

Die Zahl 5 ist keine Lösung, weil $\boxed{5}+3=7$ eine **falsche Aussage** ist.

Man nennt das „**die Probe machen**".

Dagegen ist 5 eine Lösung der Gleichung $3\cdot y=15$, denn $3\cdot\boxed{5}=15$ ist eine **wahre Aussage**.

Ich gehe davon aus, dass du, lieber Leser, gelernt hast, wie man solche Gleichungen löst. ich zeige meine Lösungsmethode an einem **BEISPIEL**:

$$7x-5=4x+7$$

Die **Lösungsmethode** besteht darin, dass man auf beiden Seiten der Gleichung dieselben Änderungen macht, wobei sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern darf.

Damit 4x rechts verschwindet, subtrahiere ich auf beiden Seiten 4x. Dann steht x nur noch links: Man schreibt den Befehl („subtrahiere 4x") hinter einen Befehlsstrich in die Gleichung. Etwa so

$$7x-5=4x+7 \quad | -4x \qquad (1)$$

Ausführlich bedeutet das: $7x-5-4x=4x+7-4x$

Und das Ergebnis ist dann: $3x-5=7$ (2)

Im nächsten Schritt soll -5 links verschwinden. Das gelingt, indem man beidseitig 5 addiert.

$$3x-5=7 \quad | +5$$

Ausführlich bedeutet das: $3x-5+5=7+5$

Und das Ergebnis ist dann: $3x=12$ (3)

Als letztes dividieren wir beidseitig durch 3 und erhalten so $x=4$ (4).

Wir haben eine einfache Endgleichung (4) erhalten mit der Lösungszahl 4. Und folglich haben auch die Zwischengleichungen (3), (2) sowie die Anfangsgleichung (1) dieselbe Lösung 4.

Dies klappt nur, weil wir bei den Umformungen sogenannte **Äquivalenzumformungen** vorgenommen haben. Die heißen so, weil sie die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern.
Weißt Du noch, was dazu alles erlaubt ist?

Addition (und Subtraktion) eines Terms (also auch einer Zahl), Multiplikation (und daher auch Division) einer Zahl ungleich 0. Dagegen kann die Multiplikation mit einem Term, der x-enthält, die Lösungsmenge vergrößern, und eine Division durch so einen Term kann sie verkleinern.

2. Jetzt kommt Neues.

Nach diesem kleinen Ausflug in die Vergangenheit gehen wir einen Schritt weiter.

Kannst du diese Gleichung lösen $2x+y=5$? (1)

Sie hat nun plötzlich zwei Unbekannte. Das Problem dabei ist: Wenn ich x berechnen will muss ich y subtrahieren: $2x+y=5 \quad | -y$

und erhalte $2x=5-y$ (2)

Oder ich stelle die Gleichung nach y um $2x+y=5 \quad | -2x$

und erhalte $y=5-2x$ (3)

In beiden Fällen erhalte ich <u>keine</u> Lösungszahl, und ich kann die rechte Seite nicht zusammenfassen, denn rechts steht ja eine Unbekannte, x oder y – je nachdem.

Also: **Wenn wir eine Gleichung mit zwei Unbekannten haben, können wir keine der beiden Unbekannten berechnen.**

Man kann jedoch auf diese Idee kommen:

Bei jedem Lösungsversuch fehlt eine Zahl. In (2) sollte man y kennen, in (3) sollte man x kennen.

Ja, wenn eine Zahl fehlt, dann wählen wir eben selbst dafür eine Zahl.
Ich verwende die Gleichung (3) und wähle für x eine Zahl:

Wähle ich x = 2, dann lautet (3): $y=5-2\cdot\boxed{2}=5-4=1$ $(2\,|\,1)$ ist eine Lösung!

Wähle ich x = 1, dann lautet (3): $y=5-2\cdot\boxed{1}=5-2=3$ $(1\,|\,3)$ ist eine Lösung

Wähle ich x = 0, dann lautet (3): $y=5-2\cdot\boxed{0}=5-0=5$ $(0\,|\,5)$ ist eine Lösung

Wähle ich x = -1, dann lautet (3): $y=5-2\cdot\boxed{-1}=5+2=7$ usw.

Wähle ich x = -2, dann lautet (3): $y=5-2\cdot\boxed{-2}=5+4=9$

So könnte man weiter machen. Was siehst du?

Zu jedem vorgegebenen x-Wert gibt es einen passenden y-Wert.
Beide zusammen nennt man ein Zahlenpaar, ein Lösungspaar.
<u>Die Lösung einer Gleichung mit zwei Unbekannten besteht also aus Zahlenpaaren.</u>
Und wie du schnell erkennst, können das unendlich viele Paare sein.

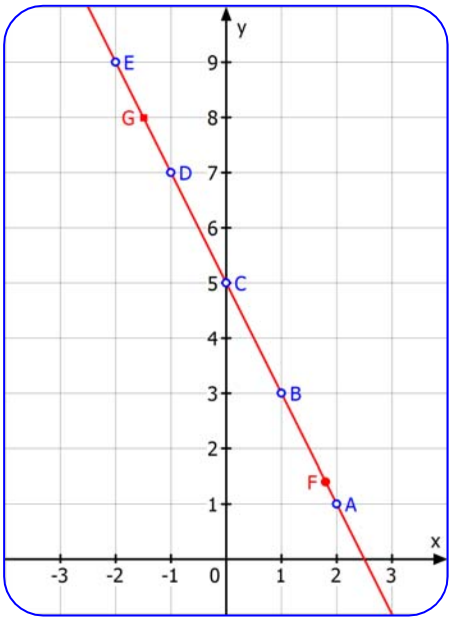
MERKE: **Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung $ax + by = c$ besteht aus unendlich vielen Zahlenpaaren.**

Eine Gleichung dieser Form ***heißt linear***, weil x und y nur den Exponenten 1 haben. $x^2 + 2y = 4$ ist nicht linear, denn in x ist sie quadratisch.)

Die Lösungsmenge enthält unendlich viele Zahlenpaare. Man kann immer nur einige davon anzeigen, etwa:

$$\mathbb{L} = \{\ldots, (2\,|\,1), (1\,|\,3), (0\,|\,5), (-1\,|\,7), (-2\,|\,9), \ldots\}$$

Erinnerst du dich daran, dass man so auch Punkte in einem Achsenkreuz beschreiben kann. Ich habe diese 5 Paare als Punkte A bis E eingetragen. Sie liegen alle auf einer Geraden.
Nun kann man die Frage stellen:
Gehören alle Punkte dieser Geraden zur Lösungsmenge?
Alle Punkte soll heißen: Die zugehörenden Zahlenpaare.



Ich habe dazu zwei weitere Punkte in die Zeichnung eingetragen.

Der Punkt F hat x = 1,8. Wie groß muss dann y sein, damit $(1{,}8\,|\,y) \in \mathbb{L}$?

Dazu ersetze ich x in der Gleichung: $2 \cdot \boxed{1{,}8} + y = 5 \quad | -3{,}6$

$y = 5 \ \boxed{-3{,}6}$

Man erhält $y = 1{,}4$.

Ergebnis: $(1{,}8\,|\,1{,}4) \in \mathbb{L}$

Der Punkt G hat y = 8. Wie groß muss dann x sein, damit $(x\,|\,8) \in \mathbb{L}$?

Dazu ersetze ich y in der Gleichung: $2x + \boxed{8} = 5 \quad | -8$

$2x = -3 \quad | : 2$

Man erhält: $x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Ergebnis: $(-1{,}5\,|\,8) \in \mathbb{L}$

Du hast jetzt gesehen, dass

1. die lineare Gleichung $2x + y = 5$ unendlich viele Lösungspaare besitzt.
2. man Lösungspaare bestimmen kann, wenn man x oder y vorgibt.
3. die Lösungspaare auf einer Geraden liegen.

Das probiere nun an Hand der nächsten Gleichung aus: $2y - x = 5$:

a) **Berechne 6 Paare der Lösungsmenge.**

b) **Finde die Paare mit x = 3,5 und mit y = -3 .**

Das ist meine Lösung:

Gegeben ist die neue Gleichung $2y - x = 5$

a) Ich habe folgende Paare berechnet:

x = -3 ergibt $2y - \boxed{-3} = 5$ also $2y = 2$ und y = 1

x = -2 ergibt $2y - \boxed{-2} = 5$ also $2y = 3$ und y = 1,5

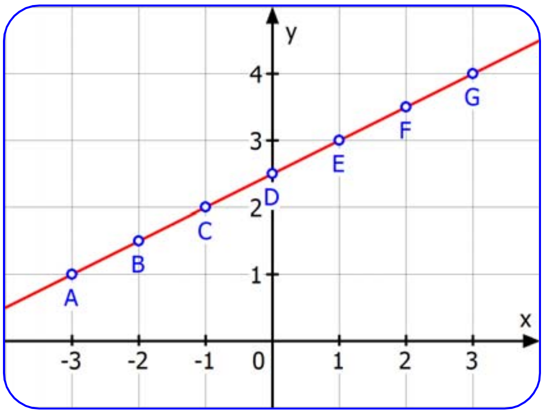
x = -1, ergibt $2y - \boxed{-1} = 5$ also $2y = 4$ und y = 2

x = 0 ergibt $2y - \boxed{0} = 5$ also $2y = 5$ und y = 2,5

x = 1 ergibt $2y - \boxed{1} = 5$ also $2y = 6$ und y = 3

x = 2 ergibt $2y - \boxed{2} = 5$ also $2y = 7$ und y = 3,5

x = 3 ergibt $2y - \boxed{3} = 5$ also $2y = 8$ und y = 4



Einige davon schreibt man in die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{...(-3\,|\,1), (-2\,|\,1{,}5), (-1\,|\,2), (0\,|\,2{,}5), (1\,|\,3), (2\,|\,3{,}5), (3\,|\,4), ...\}$$

b) **Finde die Paare mit x = 3,5 und mit y = -3.**

Setze ich für x die Zahl 3,5 ein, folgt

$$2y - \boxed{3{,}5} = 5 \quad | +3{,}5$$
$$2y = 8{,}5 \quad | :2$$
$$y = 4{,}25$$

Setze ich für y die Zahl -3 ein, folgt

$$2 \cdot \boxed{-3} - x = 5 \quad | +6$$
$$-x = 11 \quad | \cdot(-1)$$
$$x = -11$$

Also gehören auch die Paare $(3{,}5\,|\,4{,}25)$ und $(-11\,|\,-3)$ zur Lösungsmenge.

Das alles gehört noch nicht so richtig zu unserem Stundenthema, denn da geht es ja um ***Gleichungssysteme***.

Stelle Dir vor, dass x und y eine bestimmte Bedeutung haben, etwa Preise Und wir sollen x und y berechnen. Dann stellt jede Gleichung, die x und y enthält eine Bedingung für diese beiden Größen dar. Wie wir gesehen haben, reicht eine Gleichung, also eine Bedingung nicht aus, um x und y berechnen zu können. Wir finden zu jeder Gleichung unendlich viele Paare.

Nun aber gibt es eine **neue Aufgabenstellung**: Wie ist das, wenn wir zwei Bedingungen vorgeben, wenn wir also für x und y **zwei Gleichungen** haben, also ein Gleichungssystem?

3. Unser erstes Gleichungssystem

Wir suchen x und y, die nun zwei Gleichungen erfüllen müssen. Hier unsere Beispielaufgabe:

Für welche x und y gelten beide Gleichungen?
$2x+y=5$ und $2y-x=5$

Ich drücke es mathematischer so aus:

Finde die Paare, die das System $\begin{vmatrix} 2x+y=5 \\ 2y-x=5 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ **lösen.**

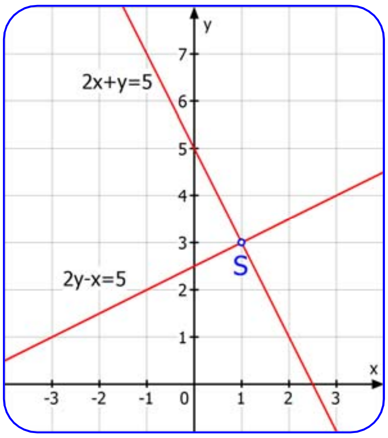
Kommen dir diese beiden Gleichungen bekannt vor? Richtig! Wir haben ihre Lösungsmengen bereits gefunden.

Lösungsmenge von (1): $\mathbb{L}_1 = \{\ldots, (2\,|\,1), (\mathbf{1\,|\,3}), (0\,|\,5), (-1\,|\,7), (-2\,|\,9), \ldots\}$

Lösungsmenge von (2): $\mathbb{L}_2 = \{\ldots(-3\,|\,1), (-2\,|\,1{,}5), (-1\,|\,2), (0\,|\,2{,}5), (\mathbf{1\,|\,3}), (2\,|\,3{,}5), \ldots\}$

Ich habe es uns leicht gemacht: Bei diesen beiden Gleichungen findet man schnell das Paar $(\mathbf{1\,|\,3})$, das zu beiden Lösungsmengen gehört, das also beide Gleichungen löst.

Es wird gleich noch interessanter:
Wir haben beide Lösungsmengen als Geraden dargestellt.
Hier eine Zeichnung, die beide Geraden enthält.



Und da das gesuchte Lösungspaar zu beiden Lösungsmengen gehört, muss der zugehörende Punkt auf beiden Geraden liegen.

Mit anderen Worten:

Das Lösungspaar unseres Gleichungssystems bedeutet den Schnittpunkt der beiden Lösungsgeraden.

Da tut sich gerade eine neue Aufgabe auf, die wir aber heute nicht besprechen wollen:
Wie berechnet man den Schnittpunkt zweier Geraden?

Unsere Aufgabe, die wir nun angehen, heißt:

Berechne die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten ohne Paare der Lösungsmengen zu berechnen und ohne die Lösungsmengen als Geraden zu zeichnen.

Es gibt dazu einige Methoden. Drei zeige ich dir.

4. Die <u>erste</u> Berechnungsmethode für ein lineares Gleichungssystem

Gegeben ist das Gleichungssystem $\begin{Bmatrix} 2x + \ \ y = 5 \\ -x + 2y = 5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Lösung mit dem Additionsverfahren

Du weißt, dass man eine Gleichung mit einer Zahl multiplizieren darf, ohne dass sich dabei die Lösungsmenge ändert. Mein Ziel ist es, dass in Gleichung (2) statt – x nun -2x steht.
Also multipliziere ich (2) mit 2, dann entsteht Gleichung (3):

Man schreibt immer das ganze System an: $\begin{Bmatrix} 2x + \ \ y = 5 \\ -2x + 4y = 10 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (3) \end{matrix}$

Wir können also beide Gleichungen addieren: $0x + 5y = 15$

Es ist $0x = 0$ und nach Division durch 5 folgt: $\boxed{y = 3}$

Du weißt schon: Wenn y bekannt ist, erhält man durch Einsetzen den zugehörenden x-Wert.

Aber wo sollen wir einsetzen? In (1): $2x + \boxed{3} = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1}$

In (2): $-2x + \boxed{12} = 10 \quad \Rightarrow \quad -2x = -2 \xrightarrow{:(-2)} \boxed{x = 1}$

Es ist egal, aus welcher Gleichung man x berechnet, denn der Schnittpunkt beider Geraden liegt auf jeder dieser Geraden, um es so auszudrücken.

Hier nochmals die zusammengefasste Lösung in Musterform:

$$\begin{Bmatrix} 2x + \ \ y = 5 \\ -x + 2y = 5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \quad | \cdot 2 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2x + \ \ y = 5 \\ -2x + 4y = 10 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (3) \end{matrix}$$

(1) + (3): $5y = 15 \quad | :5$

$$\boxed{y = 3}$$

In (1) $2x + \boxed{3} = 5 \quad | -3$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$\boxed{x = 1}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(1 \mid 3)\}$

Hast du erkannt, worin der Trick mit dem Additionsverfahren steckt?

Wir multiplizieren eine oder beide Gleichungen mit einer geeigneten Zahl, so dass in beiden Gleichungen entweder gleich viele x stehen oder gleich viele y.
Durch Addition (oder gegebenenfalls Subtraktion) der beiden Gleichungen fällt dies x oder y heraus, sodass nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt. Dazu kann man dann die zweite Unbekannte berechnen und hat die Lösung.

Aufgaben

Löse mit diesem Verfahren nun diese drei Gleichungssysteme:

(1) $\left\{\begin{array}{l} 4x - \quad y = 2 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$ Tipp: Eliminiere y …

(2) $\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 5y = 3 \end{array}\right\}$ Tipp: Eliminiere x

(3) $\left\{\begin{array}{l} 7x + 3y = 1 \\ 4x + 2y = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$ Löse zweimal und zwar:

1. Lösung mit Elimination von x, 2. Lösung mit Elimination von y.

Wenn du fertig bis, schaue nach, wie ich gerechnet habe.

Musterlösung Aufgabe (1)

Gegeben ist das Gleichungssystem $\begin{Bmatrix} 4x - \ \ y = 2 \\ 2x + 3y = 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Um y eliminieren zu können multipliziere ich (1) mit 3:

$$\begin{Bmatrix} 12x - 3y = 6 \\ 2x + 3y = 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (2) \end{matrix}$$

Addiert man (3) und (2), fällt y weg (Elimination von y):

$$14x = 14 \qquad | \ :14$$

$$\boxed{x = 1}$$

x in (1) ersetzen: $4 \cdot \boxed{1} - y = 2 \qquad | \ -4$

Ausführlich: $4 - y - 4 = 2 - 4$

Zusammengefasst: $-y = -2 \qquad | \ \cdot(-1)$

$$\boxed{y = 2}$$

Das Lösungspaar heißt also $(1 | 2)$, die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(1 | 2)\}$

Für Anfänger ist es eine gute Übung, die Probe zu machen.

Dazu setzt man das Lösungspaar in beide Gleichungen ein:

$$\begin{Bmatrix} 4 \cdot \boxed{1} - \ \boxed{2} = 2 \\ 2 \cdot \boxed{1} + 3 \cdot \boxed{2} = 8 \end{Bmatrix}$$

Fasst man zusammen, ergibt die erste Gleichung $2 = 2$ und die zweite: $8 = 8$.

Beides sind wahre Aussagen.

Wir haben noch eine Bestätigung: Das Paar $(1 | 2)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems.

Musterlösung Aufgabe (2)

Gegeben ist das Gleichungssystem $\left\{\begin{matrix} 2x+4y=1 \\ 4x+5y=3 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Um x eliminieren zu können multipliziere ich (1) mit 2:

$$\left\{\begin{matrix} 4x+8y=2 \\ 4x+5y=3 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (3) \\ (2) \end{matrix}$$

Subtrahiert man (2) von (3), fällt x weg (Elimination von x):

$$3y=-1 \qquad | :3$$

$$\boxed{y=-\tfrac{1}{3}}$$

Zur Berechnung von x ersetze ich y z. B. in (1):

$$2x+4\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)=1$$

d. h. $2x-\frac{4}{3}=1 \qquad | +\frac{4}{3}$

$$2x=\tfrac{7}{3} \qquad | :2$$

$$\boxed{x=\tfrac{7}{6}}.$$

Man könnte natürlich auch y in (2) ersetzen:

$$4x+5\cdot\boxed{-\tfrac{1}{3}}=3$$

d. h. $4x-\frac{5}{3}=3 \qquad | +\frac{5}{3}$

$$4x=\tfrac{14}{3} \qquad | :4$$

$$\boxed{x=\tfrac{14}{3\cdot 4}=\tfrac{7}{6}}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{7}{6} \mid -\frac{1}{3}\right)\right\}$

Auch hier zur Übung die Probe:

$$\left\{\begin{matrix} 2\cdot\boxed{\tfrac{7}{6}}+4\cdot\boxed{-\tfrac{1}{3}}=1 \\ 4\cdot\boxed{\tfrac{7}{6}}+5\cdot\boxed{-\tfrac{1}{3}}=3 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Gleichung (1) führt auf $\frac{7}{3}-\frac{4}{3}=1$ und das ist eine wahre Aussage,

Gleichung (2) führt auf 5 $\frac{14}{3}-\frac{5}{3}=3$ und das ist ebenso eine wahre Aussage.

Die Probe liefert eine Bestätigung der Rechnung.

Musterlösung Aufgabe (3)

$$\begin{Bmatrix} 7x+3y=1 \\ 4x+2y=\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Die beiden in Gleichung (1) und (2) gesehenen Vorgehensweisen klappen hier nicht.
Man kann keine der beiden Gleichungen so multiplizieren, dass bei x oder y ein gleiches Vielfaches entsteht. Hier muss man beide Gleichungen vervielfachen:

1. Möglichkeit: Man multipliziert (1) mit 4 und (2) mit 7, dann entsteht in beiden Gleichungen 28 x, was bei nachfolgender Subtraktion wegfällt.

2. Möglichkeit: Man multipliziert (1) mit 2 und (2) mit 3, dann entsteht in beiden Gleichungen 6y, was bei nachfolgender Subtraktion wegfällt.

Ich zeige beide Lösungswege:

1. Möglichkeit:

$$\begin{Bmatrix} 7x+3y=1 \\ 4x+2y=\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) & |\cdot 4 \\ (2) & |\cdot 7 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 28x+12y=4 \\ 28x+14y=\frac{7}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

(4) – (3): $2y=\frac{7}{3}-\frac{12}{3}$

$2y=-\frac{5}{3}$ $\quad | :2$

$\boxed{y=-\frac{5}{6}}$

y in (1) ersetzen: $7x+3\cdot\boxed{-\frac{5}{6}}=1$ $\quad | +\frac{5}{2}$

$7x=\frac{7}{2}$ $\quad | :7$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

2. Möglichkeit:

$$\begin{Bmatrix} 7x+3y=1 \\ 4x+2y=\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) & |\cdot 2 \\ (2) & |\cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 14x+6y=2 \\ 12x+6y=1 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

(3) – (4): $2x=1$ $\quad | :2$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

x in (2) ersetzen: $4\cdot\boxed{\frac{1}{2}}+2y=\frac{1}{3}$ $\quad | -2$

$2y=\frac{1}{3}-2$

$2y=-\frac{5}{3}$ $\quad | :2$

$\boxed{y=-\frac{5}{6}}$

Ergebnis: Beide Wege ergeben $\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{2}\,|\,-\frac{5}{6}\right)\right\}$.

Die zweite Möglichkeit ist günstiger, denn da fällt sofort der Bruch $\frac{1}{3}$ weg usw.

5 Die <u>zweite</u> Berechnungsmethode für ein lineares Gleichungssystem

Gegeben ist das Gleichungssystem $\begin{Bmatrix} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Lösung mit dem Einsetzungsverfahren

Ziel jedes Lösungsverfahrens ist es, möglichst rasch eine Unbekannte zu eliminieren.

Beim Einsetzungsverfahren stelle man eine Gleichung nach x oder y um und ersetzt damit diese Variable in der anderen Gleichung.

Hier kann man (1) sofort in $y = 5 - 2x$ (3) umstellen und das in (2) einsetzen.

So erhält man: $-x + 2 \cdot (5 - 2x) = 5$

Vereinfachen: $-x + 10 - 4x = 5$ | -10

$-5x = -5$ | :(-5)

$\boxed{x = 1}$

x in (3) ersetzen; $y = 5 - 2 \cdot \boxed{1} = 3$

Ergebnis: Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(1 \mid 3)\}$

Auch das solltest Du sofort üben:

(1) $\begin{Bmatrix} 4x - y = 2 \\ 2x + 3y = 8 \end{Bmatrix}$ Tipp: Eliminiere y …

(2) $\begin{Bmatrix} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 5y = 3 \end{Bmatrix}$ Tipp: Eliminiere x

Meine Lösung mit dem Einsetzungsverfahren

(1)

$$\begin{cases} 4x - y = 2 & (1) \\ 2x + 3y = 8 & (2) \end{cases}$$

Aus (1): $y = 4x - 2$ (3)

Einsetzen in (2): $2x + 3 \cdot (4x - 2) = 8$

$2x + 12x - 6 = 8 \quad | +6$

$14x = 14 \quad | :14$

$\boxed{x = 1}$

Einsetzen in (3): $y = 4 \cdot \boxed{1} - 2 = 2$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(1 | 2)\}$

(2)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 & (1) \\ 4x + 5y = 3 & (2) \end{cases}$$

Ich stelle nach 2x um zum Einsetzen:

$2x = \boxed{1 - 4y}$ (3)

Das Doppelte in (2) einsetzen:

$\boxed{2 - 8y} + 5y = 3$

$2 - 3y = 3 \quad | -2$

$-3y = 1 \quad | :(-3)$

$\boxed{y = -\frac{1}{3}}$

Einsetzen in (3): $2x = 1 - 4 \cdot \boxed{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \quad | :2$

$\boxed{x = \frac{7}{6}}$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{7}{6} \middle| -\frac{1}{3}\right)\right\}$

6 Die <u>dritte</u> Berechnungsmethode für ein lineares Gleichungssystem

Wenn ein Gleichungssystem in dieser Form gegeben ist:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

bietet sich auch das sogenannte *Gleichsetzungsverfahren* an:

„Wenn die linken Seiten gleich sind, müssen es auch die rechten Seiten sein!“

Also folgt:

$2x - 4 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad | \ +\frac{1}{2}x \text{ und } +4$

$2x + \frac{1}{2}x = 1 + 4$

$\frac{5}{2}x = 5 \quad | \ \cdot\frac{2}{5}$ (das ist dasselbe wie $| \ :\frac{5}{2}$)

$x = 5 \cdot \frac{2}{5}$

$\boxed{x = 2}$

Einsetzen in (1). $y = 2 \cdot \boxed{2} - 4 = 0$

Oder in (2): $y = -\frac{1}{2} \cdot \boxed{2} + 1 = -1 + 1 = 0$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(2 \mid 0)\}$

Eine letzte Übung für Dich:

$$\left\{\begin{array}{l} y = \ \ \frac{2}{3}x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x - 3 \end{array}\right\}$$

Meine Lösung mit dem Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{Bmatrix} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x - 3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Gleichsetzen: $\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{1}{2}x - 3 \quad |\cdot 6$

Hier empfehle ich, die Gleichung mit dem Hauptnenner von 3 und 2, also mit 6 zu multiplizieren, dann ist die Gefahrenquelle „Bruch" weg;

$$6 \cdot \frac{2}{3}x + 6 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x - 18$$

Kürzen: $4x + 6 = -3x - 18 \quad |\ +3x \text{ und } -6$

$$7x = -24 \quad |\ :7$$

$$\boxed{x = -\frac{24}{7}}$$

Einsetzen in (2): $y = -\frac{1}{2} \cdot \boxed{-\frac{24}{7}} - 3 = \frac{12}{7} - \frac{21}{7} = -\frac{9}{7}$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{24}{7} \mid -\frac{9}{7}\right)\right\}$

7 Nun fassen wir zusammen, was wir gelernt haben

1. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten haben unendlich viele Zahlenpaare als Lösungen. (Es gibt Ausnahmen, die keine Lösung haben).

2. Ein System aus zwei solchen Gleichungen kann durch eines der folgenden Verfahren gelöst werden:

   M1 Additions- oder Subtraktionsverfahren

   M2 Einsetzungsverfahren

   M3 Gleichsetzungsverfahren

   Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems bestand in unseren Beispielen aus einem einzigen Zahlenpaar.

   (Es gibt noch zwei Sonderfälle. Dazu folge am Ende der Stunde je ein Beispiel.)

3. Es ist egal, welches Lösungsverfahren man verwendet, jedoch haben manche Gleichungen ein Merkmal, an dem man erkennt, welche der drei Methoden günstiger ist.

Übung:

Versuche zu erkennen, welche Methode (M1, M2, M3) in den folgenden Beispielen günstig ist:
Du sollst jetzt nicht die Lösung berechnen! Begründe Deinen Vorschlag.

(a) $\begin{Bmatrix} 5x+2y=24 \\ 3x-2y=8 \end{Bmatrix}$ (b) $\begin{Bmatrix} 2x+y=2 \\ 5x-3y=5 \end{Bmatrix}$ (c) $\begin{Bmatrix} 3x-4y+7=0 \\ 5x+3y+2=0 \end{Bmatrix}$

(d) $\begin{Bmatrix} x-8y=12 \\ 3x-4y=1 \end{Bmatrix}$ (e) $\begin{Bmatrix} x=3y-4 \\ x=y+2 \end{Bmatrix}$ (f) $\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=2 \\ x-4y=4 \end{Bmatrix}$

Ich würde so rechnen:

(a) $\begin{Bmatrix} 5x + \boxed{2y} = 24 \\ 3x - \boxed{2y} = 8 \end{Bmatrix}$

Mit dem Additionsverfahren (M1) fällt y sofort heraus.

Man kann daher schnell x berechnen

(b) $\begin{Bmatrix} 2x + y = 2 \\ 5x - 3y = 5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Hier bietet sich das Einsetzungsverfahren (M2) an.

Stelle (1) nach y um: $y = 2 - 2x$ und setze in (2) ein.

Man kann aber auch die erste Gleichung mit 3 multiplizieren und dann mit dem Additionsverfahren y eliminieren.

(c) $\begin{Bmatrix} 3x - 4y + 7 = 0 \\ 5x + 3y + 2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Hier benötigt man eine doppelte Multiplikation. Damit beim

Subtraktionsverfahren x verschwindet, muss man (1) mit 5 und (2) mit 3 multiplizieren.

Will man stattdessen y eliminieren, wird man das Dreifache von (1) zum Vierfachen von (2) addieren.

(d) $\begin{Bmatrix} x - 8y = 12 \\ 3x - 4y = 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Stellt man (1) nach x um und setzt x = 12 + 8y in (2) ein

erhält man schnell die Lösung (Einsetzungsverfahren M2)
Man könnte auch das Subtraktionsverfahren anwenden:
Gleichung (2) minus das Dreifache von (1) Oder:
Gleichung (1) minus das Doppelte von (2).

(e) $\begin{Bmatrix} x = 3y - 4 \\ x = y + 2 \end{Bmatrix}$

Gleichsetzungsverfahren (M3)

(f) $\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 2 \\ x - 4y = 4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Entweder das Einsetzungsverfahren (nach x aus (2) umstellen)

Oder das Subtraktionsverfahren, z, B. Das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten subtrahieren.

Falls du die Lösungsmenge berechnet hast, das sind meine Ergebnisse:

(a)	$\mathbb{L} = \{(4 \mid 2)\}$	(b)	$\mathbb{L} = \{(1 \mid 0)\}$	(c)	$\mathbb{L} = \{(-1 \mid 1)\}$
(d)	$\mathbb{L} = \{(-2 \mid -\frac{7}{4})\}$	(e)	$\mathbb{L} = \{(5 \mid 3)\}$	(f)	$\mathbb{L} = \{(4 \mid 0)\}$

8 Zum Schluss der Stunde;

Es gibt zwei Sonderfälle, die ich noch zeige möchte.

Schau dir bitte diese beiden Gleichungssysteme an:

$$(E)\quad \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}x - y = 2 \\ x - \frac{3}{2}y = 3 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad (K)\quad \begin{Bmatrix} 2x - 3y + 12 = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0 \end{Bmatrix}$$

Su tanzen völlig aus der Reihe. Das bemerkt man erst, wenn man versucht, sie zu lösen:

Lösung von (E):

$$\begin{Bmatrix} \frac{2}{3}x - y = 2 \\ x - \frac{3}{2}y = 3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) & |\cdot 3 \\ (2) & |\cdot 2 \end{matrix}$$

Im ersten Schritt beseitige ich die Brüche !!! (Ein heißer Tipp, damit vermeidet man oft Fehler).

Und dann erkenne ich, dass beide Gleichungen dieselbe Folgegleichung haben: $\begin{Bmatrix} 2x - 3y = 6 \\ 2x - 2y = 6 \end{Bmatrix}$

Die zweite Gleichung ist nämlich das $\frac{3}{2}$ – fache der ersten Gleichung

Und damit haben beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge:
Wir suchen für unser Gleichungssystem alle Paare, die beide Gleichungen lösen
Wenn aber wie hier beide dieselbe Lösungsmenge haben, dann hat die Lösungsmenge des Systems unendlich viele Paare.

Stellt man sich die Lösungsmenge als Gerade vor, dann ist doch völlig klar:
Nur zwei identische Geraden haben dieselben Punkte. Welch banale Aufgabe!

Lösung von (F):

$$\begin{Bmatrix} 2x - 3y + 12 = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0 \end{Bmatrix}$$

Ich beseitige die Brüche der zweiten Gleichung indem ich mit 6 multipliziere.
Dann wird aus der zweiten Gleichung: $2x - 3y - 6 = 0$

Das Gleichungssystem besteht dann aus diesen beiden Gleichungen:

$$\begin{Bmatrix} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x - 3y - 6 = 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Subtrahiert man sie, erhält man: $18 = 0$

Das ist ein Widerspruch gegen die Annahme, das System sei lösbar.

Ergebnis: Das System (K) hat also gar keine Lösungspaare:

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{\ \}$.

Wenn zwei Geraden keine gemeinsamen Punkte haben, dann sind sie parallel.
Diesen Sonderfall stellt unser Gleichungssystem dar.

Wenn du noch weitere Übungsbeispiele suchst, schaue in den Text 12180 rein ….