Schulstunde

Wie löst man Bruchgleichungen?

Teil 1

Ein Text von

Friedrich Buckel

Datei Nr. 12145

Stand: 24. März 2023

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort:

Das Thema Bruchgleichungen ist ein weites Feld. Damit die Texte nicht zu umfangreich werden, beginne ich mit diesem ersten Teil wie mit einer Einführungsstunde. Ich zeige an Beispielen, wie man vorgeht um die Lösungszahl(en) zu finden. Die vielen Übungsbeispiele und Trainingsaufgaben folgen im nächsten Text mit der Nummer 12146.

Ein Hinweis ist noch wichtig.

Es gibt Gleichungen, die von jeder Zahl gelöst werden, etwa $2x+1=2x+1$.
Dann sind alle Zahlen, die man kennt, Lösungszahlen. Es hängt nun aber von der Klassenstufe ab, was „alle Zahlen“ bedeutet. In der Klassenstufe 7 und 8 kennt man meistens nur die Menge $\mathbb{Q}$ der **rationalen Zahlen**, also der Zahlen, die man als Bruch aus ganzen Zahlen darstellen kann.
In Klasse 9 lernt man, dass es auch Zahlen gibt, die man nicht als Brüche schreiben kann, man nennt sie **irrationale Zahlen**, etwa $\sqrt{2}$ (man liest das Wurzel 2) usw. Nimmt man diese alle dazu, dann bilden die rationalen zusammen mit den irrationalen Zahlen die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Wenn ich in diesem Text alle Zahlen meine, schreibe ich meistens $\mathbb{Q}$ hin. Die Grundmenge $\mathbb{Q}$ kann ja für Schüler mit mehr Kenntnissen durch $\mathbb{R}$ ersetzt werden.

Weitere Texte zum Rechnen mit Bruchtermen sind (grundlagen)

12110	Bruchterme 1	(Definitionsbereich, Kürzen, Erweitern)
12111	Bruchterme 2	(Addition, Subtraktion, Hauptnenner)
12112	Bruchterme 3	Trainingsaufgaben aus diesen zwei Dateien

12145	Bruchgleichungen 1	(Einführung, dieser Text - Schulstunde)
12146	Bruchgleichungen 2	(Übungsheft: 50 Beispiele und Aufgaben)
12147	Gleichungen mit Parametern (auch Bruchgleichungen)	
12140	Bruchgleichungen 3	(die auf quadratische Gleichungen führen)

Inhalt

1 Übersicht 3

2 Kannst du Gleichungen lösen? Methoden 4

3 Probleme beim Lösen von Bruchgleichungen 8

B1 $\frac{4}{x-1}=2$ B2 $\frac{4}{x}=\frac{5}{x-2}$

B3 $\frac{3}{2x}+\frac{2}{6x}=5$ B4 $\frac{x+1}{x+2}+1=\frac{2x+3}{x+2}$

4 Tipps und Tricks für Hauptnenner 14

5 Nun noch eine kleine Hausaufgabe 16

Besprechung der Hausaufgabe 17

Hilfe: Faktorisieren mit den binomischen Formeln 22

1 Übersicht

Als **echte** **Bruchgleichungen** bezeichne ich Gleichungen, bei denen x im Nenner eines Bruches vorkommt:

$$\frac{2}{x}+x=3 \qquad \text{oder} \qquad \frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x}$$

Dagegen ist $\frac{x+3}{4}-\frac{x}{5}=2$ keine „echte" Bruchgleichung.

Sie enthält zwar Brüche, aber im Nenner steht kein x.

Die Gleichung $\frac{2}{\sqrt{x}}=5$ bezeichnet man eigentlich nicht als Bruchgleichung sondern als Wurzelgleichung, weil die Quadratwurzel darin höhere Anforderungen stellt.

Beim Lösen von Bruchgleichungen sind zwei Fähigkeiten von großer Bedeutung:

- Das Aufstellen des **Definitionsbereichs**
  Dies wird sehr ausführlich im Text 12111 (Grundlagen für Bruchterme) gezeigt.

- Das Ermitteln des **gemeinsamen Nenners der Bruchterme** in der Gleichung.
  Dazu wiederum ist es notwendig, dass man weiß, wie man Terme faktorisiert.
  Auch dies wurde in 12111 bei der Bestimmung des Definitionsbereichs gezeigt.

Den Einsatz dieser Methoden sieht man im folgenden Theorieabschnitt, in dem erklärt wird, nach welchen Methoden man Bruchgleichungen löst.

WICHTIG

2. Kannst du Gleichungen lösen?

Ich zeige dir ausführlich, was hinter der Methode steckt.

Ich verwende dazu diese Gleichung: $15x-4=10x+11$ (1).

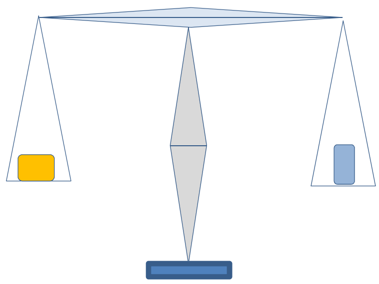
Ich verrate im Voraus, dass die Zahl 3 ihre Lösung ist. Dass dies wahr ist, zeigt die Probe:

Setzt man für x die Zahl 3 ein, folgt daraus: $\underbrace{15\cdot\boxed{3}-4}_{41}=\underbrace{10\cdot\boxed{3}+11}_{41}$.

Und das ist eine wahre Aussage.
Damit haben wir aber die Gleichung <u>nicht gelöst</u>, sondern nur die Lösung gecheckt.
Jetzt sehen wir uns ausführlich an, wie eine Lösungsmethode aussehen kann!

Das Wort „Gleichung“ besagt ja schon das Entscheidende: Die beiden Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen sollen den **gleichen Wert** bekommen, wenn man die Lösungszahl einsetzt.

Eine Gleichung wird oft mit einer Balkenwaage verglichen.
Sie ist im Gleichgewicht, wenn auf beiden Seiten „gleich viel“ liegt.
Bei unserer Gleichung ist das der Fall, wenn x = 3 ist.



Das Lösungsprinzip für eine Gleichung ist einfach und verwendet folgende Regeln:

> Vereinfache die Gleichung, indem du auf beiden Seiten dasselbe tust.
> Beispielsweise kannst du <u>auf beiden Seiten</u> dasselbe addieren oder subtrahieren.
> Dadurch bleibt die Waage im Gleichgewicht.
>
> Ziel dieser Umformungen ist es, durch solche Aktionen die Gleichung schrittweise zu vereinfachen. ABER: Dadurch darf die <u>Lösungszahl nicht geändert</u> werden.
> Das heißt die Folgegleichung ***soll*** dieselbe Lösung haben!!!
> Das treibt man so lange, bis am Ende eine so einfache Gleichung entstanden ist, der man die Lösung ansieht.

Ich zeige dir jetzt, welche Umformungen dazu geeignet sind und welche man besser nicht machen sollte.

Auf geht’s!

An dieser Gleichung wollen wir üben: $15x-4=10x+11$ (1)

Eine gute Idee ist es, wenn man die Gleichung erst einmal sortiert. Wir wollen alle Zahlen ohne x rechts haben und alle x-Vielfachen links. Also muss zuerst einmal links die -4 verschwinden.

Das gelingt, indem man **beidseitig** 4 addiert.

Das deutet man an, indem man rechts hinter einen Befehlsstrich +4 schreibt:

$$15x-4=10x+11 \quad | +4 \qquad (1)$$

Ich will es so ausführlich wir möglich machen, also schreibe ich diese Addition in die Gleichung:

$$15x-4\ \boxed{+4}=10x+11\ \boxed{+4} \qquad (2)$$

Jetzt fassen wir zusammen zu: $15x=10x+15$ (3).

Durch die Addition von +4 ist -4 verschwunden. Das hat also geklappt.

Dasselbe machen wir nun mit 10x, denn die x-Terme sollen alle links stehen.

Überlege: Damit 10x verschwindet, subtrahieren wir **beidseitig** 10x.

Dies schreibt man in die Zeile (3) hinter einen neuen Befehlsstrich:

$$15x=10x+15 \quad | -10x \qquad (3)$$

Diese Subtraktion schreibe ausführlich in die nächste Zeile:

$$15x-\boxed{10x}=10x-\boxed{10x}+15 \qquad (4)$$

Und wir fassen zusammen: $5x = 15$ (5)

Nun soll links ja nur noch x stehen, also im Grunde 1x. Um das zu erreichen dividieren wir **beidseitig** durch 5: $5x=15 \quad |:5$ (6)

Ganz ausführlich: $\frac{5x}{5}=\frac{15}{5}$ (7)

Wir kürzen und erhalten $x=3$ (8)

Ich habe nun (fast) jede Kleinigkeit aufgeschrieben. Einige dieser Gleichungen wird man weglassen, weil man vieles im Kopf rechnen kann:

Das sind die notwenigen Gleichungen:

$$15x-4=10x+11 \quad | +4 \qquad (1)$$

$$15x=\mathbf{10x}+15 \quad | -10x \qquad (3)$$

$$\mathbf{5}\cdot x=15 \quad | :5 \qquad (6)$$

$$\boxed{x=3} \qquad (8)$$

Jede dieser Gleichungen hat 3 als Lösungszahl. (Mache einfach die Probe durch Einsetzen)

Und jede ist eine Vereinfachung der vorangehenden Gleichung, so dass man aus der Endgleichung (8) die Lösungszahl 3 sofort ablesen konnte.

Jetzt kennst du das Lösungsprinzip: **Vereinfachen und die Lösung ablesen**.

Wichtig ist dabei nur, dass man Umformungen vornimmt, die an der Lösungsmenge der gegebenen Gleichung nichts ändern.

Man verwendet dabei zwei Begriffe:

Man nennt Gleichungen äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben.

Eine Umformung, welche die Lösungsmenge nicht ändert, nennt man eine Äquivalenzumformung.

Diese Äquivalenzumformungen haben wir im Beispiel vorgenommen:

1. **Auf beiden Seiten der Gleichung wurde derselbe Term addiert (bzw. subtrahiert).**

   (dazu gehört auch addieren oder subtrahieren einer Zahl oder eines Vielfachen von x wie 10x usw.)

2. **Beide Seiten der Gleichung wurden mit einer Zahl ungleich 0 multipliziert**

   (dazu gehört auch die Division durch 5, das entspricht ja einer Multiplikation mit $\frac{1}{5}$ usw.)

Information:

Folgende Umformungen sind KEINE Äquivalenzumformungen und sollten daher vermieden werden

1. **Die Multiplikation einer Gleichung mit 0 - ist verboten**

2. **Die Multiplikation mit einem Term, der x enthält, ist oft keine Äquivalenzumformung. Es können falsche Lösungen dazukommen!**

3. **Division mit einem Term, der x enthält, ist oft keine Äquivalenzumformung. Es können Lösungen verloren gehen.**

Zu jeder dieser „schlimmen“ Umformungen ein kleines Beispiel:

Zu (1): Die Gleichung $4 \cdot x = 8$ hat die Lösungszahl 2: $4 \cdot \boxed{2} = 8$. (5)

Jetzt schauen wir uns an, was passiert, wenn man diese Gleichung mit 0 multipliziert:

Also: $\boxed{0} \cdot 4 \cdot x = \boxed{0} \cdot 8$

Oder kürzer: $0 \cdot x = 0$. (6)

Diese Gleichung (6) ist *allgemeingültig*, denn jede Zahl löst sie:

Etwa auch die 7: $0 \cdot 7 = 0$.

7 ist aber keine Lösung der gegebenen Gleichung. denn $4 \cdot 7 = 8$ ist falsch.

Man erkennt, dass die Multiplikation mit 0 keine Äquivalenzumformung ist, denn dann entstehen Lösungen, die nicht für die **Anfangsgleichung** (5) gelten

Zu (2) Die Gleichung $2x + 3 = x + 6$ hat die Lösung 3.

Wenn man diese Gleichung beidseitig mit dem Term $(x-4)$ multipliziert,

erhält man: $(2x+3)(x-4) = (x+6)(x-4)$

oder ausmultipliziert: $2x^2 - 8x + 3x - 12 = x^2 - 4x + 6x - 24$

bzw. $2x^2 - 5x - 12 = x^2 + 2x - 24$

und kommt auf $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen 3 und 4, wie man durch eine Probe

nachweisen kann: $\boxed{3}^2 - 7 \cdot \boxed{3} + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$

bzw. $\boxed{4}^2 - 7 \cdot \boxed{4} + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$

Also ist jetzt die Zahl 4 als Lösung dazugekommen, denn x = 4 löst die gegebene Gleichung nicht.

Zu (3) Schüler lösen oftmals die Gleichung $x^2 + 8x = 0$ auf diese Weise falsch:

Da jeder Summand den Faktor x enthält, dividieren sie durch x, worauf die neue Gleichung so heißt: $x + 8 = 0$

Aus ihr erhält man -8 als Lösungszahl.

Bei der Division durch x geht aber die zweite Lösungszahl 0 verloren.

0 ist nämlich auch eine Lösung: $0^2 + 8 \cdot \boxed{0} = 0$

MERKE:

Eine Gleichung löst man, indem man mit bestimmten Umformungen aus komplizierten Gleichungen neue, einfachere Gleichungen erstellt. Diese Umformungen müssen aber garantieren, dass die vereinfachte Gleichung dieselben Lösungszahlen besitzt, also Äquivalenzumformungen

Dies macht man so lange, bis am Ende eine so einfache Gleichung übrig bleibt, der man die Lösungszahl(en) ansieht. Diese gelten dann auch für die Anfangsgleichung!

3 Probleme beim Lösen von Bruchgleichungen

Beispiel 1 $\frac{4}{x-1} = 2$ (1).

Wichtiger Lesestoff

Es ist sehr wichtig, dass man sich **vor Beginn einer Umformung** darüber klar ist, dass hier durch einen Term mit x dividiert wird.

Das ist nicht unbedingt ein Problem, solange man nicht durch 0 dividieren will.

Denn das geht gar nicht. Warum????

Das steht schön verständlich im Kurztext 12115. Schau mal rein ….

„Aber hier wird doch gar nicht durch Null dividiert – ich sehe zumindest keine Null.“

Wenn das jemand sagt, schenke ihm eine 1, die er für x einsetzen soll.

Dann heißt die linke Seite unserer Gleichung so: $\frac{4}{1-1}$ oder $\frac{4}{0}$ und „Aus ist die Maus“!

Solcher Schabernack wird schnell übersehen, denn wer erwartet denn sowas? Daher mein

TIPP Bevor du eine Bruchgleichung löst, bestimme den Definitionsbereich der Gleichung. Das sind alle Zahlen, die man einsetzen DARF, die also hier nicht zu einer Division durch 0 führen.

Ich mache das vor:

Vorarbeit:

Definitionsbereich der Gleichung:

Wann wird der Nenner $= 0$?

d. h. $x-1=0$ also $x=1$.

Definitionsbereich $\mathbb{D} = \text{Grundmenge} \setminus \{1\}$

Ja, was ist denn die Grundmenge?

Das sind alle verfügbaren Zahlen. In der Klassenstufe 7 und 8 kennt man meistens nur die Menge $\mathbb{Q}$ der **rationalen Zahlen**, also der Zahlen, die man als Bruch aus ganzen Zahlen darstellen kann.

In Klasse 9 lernt man, dass es auch Zahlen gibt, die man nicht als Brüche schreiben kann, man nennt sie **irrationale Zahlen**, etwa $\sqrt{2}$ (man liest das Wurzel 2) usw. Nimmt man diese alle dazu, dann bilden die rationalen zusammen mit den irrationalen Zahlen die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Also wird ein Schüler der Klasse 8 den Definitionsbereich so aufschreiben: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$,

und ab Klasse 9 dann so: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Beides besagt kurz: *Alle Zahlen außer 1*.

Also das war die Vorarbeit, die nach viel aussieht, aber in 1 Minute erledigt ist.

Ohne sie kann die ganze Lösung unbrauchbar werden.

Nun erst geht es an die Lösung der Gleichung.

Die Lösung von $\frac{4}{x-1}=2$ kann ich auf drei Arten finden:

1. Lösung: Ich mache aus der Gleichung einen Fragesatz, etwa so:

Wodurch muss man 4 dividieren um 2 zu erhalten?

Die Antwort fällt dir sofort ein: „Durch 2."

Also muss im Nenner statt $x-1$ diese 2 stehen:

und aus $x-1=2$ folgt dann $x = 3$ als Lösung.

2. Lösung: **x steht im Nenner, das erschwert die Aufgabe.**

Gemäß dem Grundsatz „Beseitige was dich stört", kann man sich daher vornehmen, eine Umformung zu machen, die x in den Zähler bringt.

Damit x in den Zähler kommt, nehme ich ***auf beiden Seiten*** den **Kehrwert**:

Gegeben:	$\frac{4}{x-1}=2$		(1)
Kehrwert:	$\frac{x-1}{4}=\frac{1}{2}$	$\vert \cdot 4$	(2)
	$x-1=2$	$\vert +1$	(3)
	$x=3$		(4)

Erklärung: In (2) stören die Nenner. Diese beseitigen wir, indem wir die Gleichung mit 4 multiplizieren. So entsteht (3)

In (4) liest man die Lösung ab: 3.

3. Lösung: **Man kann den Nenner auch dadurch beseitigen, dass man die Gleichung mit (x-1) multipliziert.**

Dies führt zu $\frac{4}{x-1}(\mathbf{x-1})=2\cdot(\mathbf{x-1})$ (2)

Ziel dieser Aktion war es, den Nennerterm wegkürzen zu können:

Das gelingt so: $\frac{4}{\cancel{(x-1)}}\cancel{(x-1)}=2\cdot(x-1)$

Es bleibt:	$4=2x-2$	$\vert +2$
Ergibt:	$6=2x$	$\vert :2$
Endgleichung:	$3=x$	

Wir erkennen die Lösungszahl 3.

Besser gesagt: <u>Wenn</u> es eine Lösungszahl gibt, dann ist es die 3.

Du bist nämlich mit dieser Aufgabe noch nicht fertig!

Zwei Dinge sind noch zu erledigen

Das machen wir auf der nächsten Seite.

Was noch nicht gemacht worden ist:

1. **Wenn die Lösungszahl zu einer Division durch 0 führt, taugt sie nichts.**

   Also musst du nachschauen, ob 3 zum Definitionsbereich der Gleichung gehört. *Die Vorarbeit haben wir ja extra dafür gemacht*:

   Es ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, also gehört 3 zum Definitionsbereich der Gleichung, d. h. wenn man sie einsetzt, wird nicht durch Null dividiert.

2. **Beim Umformen der Gleichung wurde mit einem Term multipliziert. Im vorangehenden Abschnitt wurde genannt, dass dies keine Äquivalenzumformung ist.**

   Das heißt, dass sich in manchen Fällen dadurch eine falsche Lösung einschleicht. Du musst also noch die Probe machen:

   3 einsetzen in $\frac{4}{x-1} = 2$ **ergibt:** $\frac{4}{\boxed{3}-1} = 2$.

   Das ist eine wahre Aussage, also bleibt es dabei:

$$\mathbb{L} = \{3\}$$

Das war wohl die extrem ausführlichste Lösung ……

Zusammenfassung:

Folgendes Lösungsverfahren haben wir verwendet. ich nenne es das Drei-Schritt-Verfahren

1. Schritt Bestimme den **Definitionsbereich** der Gleichung (Vorarbeit)

2. Schritt Die Gleichung **umformen und vereinfachen**.

   (Dazu gehört die Beseitigung der Nenner, indem man mit dem Hauptnenner multipliziert, und anschließend kürzt.

3. Schritt **Doppelte Kontrolle**:
   I. Gehört die gefundene Lösungszahl zum Definitionsbereich?
   II. Die Probe machen (denn durch die Multiplikation mit dem Nennerterm können sich fremde Lösungen in die Endgleichung eingeschlichen haben.)

Jetzt nehmen wir uns ein nächstes Beispiel vor und wenden an, was wir gelernt haben:

Beispiel 2

$$\frac{4}{x} = \frac{5}{x-2}$$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen — Vorarbeit!

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: Für x = 0.

2. Nenner: Für x = 2.

Daher sind 0 und 2 auszuschließen: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0; 2\}$

2. Schritt : Hauptnenner bestimmen und vereinfachen

In diesem Fall ist der Hauptnenner das Produkt beider Nenner: $HN = x \cdot (x-2)$

$\frac{4}{x} = \frac{5}{x-2}$ | $\cdot x(x-2)$ und kürzen

$\frac{4}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}(x-2) = \frac{5}{\cancel{x-2}} \cdot x\cancel{(x-2)}$ *Diese Zeile muss nicht aufgeschrieben werden!*

$4(x-2) = 5x$

$4x - 8 = 5x$ | -4x

$-8 = x$

3. Schritt: Kontrolle

I. -8 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

II. *Hier wurde mit* $x(x-2)$ *multipliziert. Bei dieser Multiplikation hätte sich die Lösungsmenge vergrößern können. Aber dies ist nicht der Fall.*

Die Probe zeigt, dass -8 eine Lösung ist:

$\frac{4}{\boxed{-8}} = \frac{5}{\boxed{-8}-2}$ *also* $\frac{-4}{8} = -\frac{5}{10}$ *und beide Seiten sind* $-\frac{1}{2}$, *also stimmt die Probe.*

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-8\}$

Beispiel 3:

$$\frac{3}{2x}+\frac{2}{6x}=5$$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Vorarbeit.

x = 0 ist verboten: $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

2. Schritt : Hauptnenner bestimmen und vereinfachen

1. Nenner:	2x
2. Nenner:	6x
Hauptnenner:	6x **(nicht 12x)**!

$\frac{3}{2x}+\frac{2}{6x}=5 \qquad | \cdot 6x$

$\frac{3}{\cancel{2x}}\cdot \cancel{6x}^{3}+\frac{2}{\cancel{6x}}\cdot \cancel{6x}=5\cdot 6x$ *Diese Zeile muss nicht aufgeschrieben werden!*

$9+2=30x$

$30x=11 \qquad |:30$

$x=\frac{11}{30}$

3. Schritt: Kontrolle

I. $\frac{11}{30}\in\mathbb{D}$

II. Die Probe mit $x=\frac{11}{30}$ führt zu einer wahren Aussage,
Bei der Multiplikation mit 6x hat sich die Lösungsmenge nicht vergrößert.
(wurde nicht überprüft)

Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{\frac{11}{30}\right\}$.

Das nächste Beispiel ist hochexplosiv. Ich gehe in Deckung!

Beispiel 4

$$\frac{x+1}{x+2}+1=\frac{2x+3}{x+2}$$

$\boxed{\text{1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$ Vorarbeit.

-2 ist verboten, denn sonst wird durch 0 dividiert! $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$

$\boxed{\text{2. Schritt : Hauptnenner bestimmen und vereinfachen}}$

Beide Brüche haben den gleichen Nenner x+2. Damit wird multipliziert:

$$\frac{x+1}{x+2}\cdot(x+2)+1\cdot(x+2)=\frac{2x+3}{x+2}\cdot(x+2)$$

Kürzen $$\frac{x+1}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}+1\cdot(x+2)=\frac{2x+3}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}$$ (Weglassen)

$$x+1+x+2=2x+3$$

Zusammenfassen: $2x+3=2x+3$

$\boxed{\text{3. Schritt: Kontrolle}}$

Diese Endgleichung ist allgemeingültig, denn jede Zahl der Grundmenge $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ führt zu einer wahren Aussage, ist also eine Lösung.

Wir haben zu Beginn der Lösung den Definitionsbereich bestimmt und wissen daher, dass x nicht die Zahl -2 sein darf, weil sonst durch 0 dividiert wird.

Andererseits können nicht alle Zahlen der Grundmenge Lösungen sein. Die -2 nicht.
Also ist die Lösungsmenge nicht die ganze Grundmenge sondern nur der Definitionsbereich.

Merke: Erweist sich eine Gleichung als allgemeingültig, dann ist nicht die Grundmenge die Lösungsmenge sondern der Definitionsbereich.

$$\mathbb{L}=\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$$

4. Benötigst du noch Tipps und Tricks für Hauptnenner?

1. Möglichkeit: Einen Faktor ausklammern (5 Beispiele)

a) $\frac{5}{2x+10}-\frac{1}{3x+15}$

Man muss die Nenner zuerst in Faktoren zerlegen:

$2x+10=\boxed{2}\cdot(x+5)$

und $3x+15=\boxed{3}\cdot(x+5)$.

Hauptnenner: $\boxed{2}\cdot\boxed{3}\cdot(x+5)=6\cdot(x+5)$

$$\frac{5}{\boxed{2}(x+5)}-\frac{1}{\boxed{3}(x+5)}=\frac{5\cdot\boxed{3}}{\underbrace{\boxed{2}(x+5)\cdot\boxed{3}}_{\text{mit 3 erweitert}}}-\frac{1\cdot\boxed{2}}{\underbrace{\boxed{3}(x+5)\cdot\boxed{2}}_{\text{mit 2 erweitert}}}=\frac{15}{\underbrace{6\cdot(x+10)}_{\text{Hauptnenner}}}-\frac{2}{6(x+10)}=\frac{13}{6(x+10)}$$

Der erste Bruch wurde mit dem Nennerfaktor 3 des 3. Bruches erweitert,

der zweite Bruch mit dem Nennerfaktor des ersten Bruches.

Und schon haben beide denselben Nenner, und er ist das kgV.

b) $\frac{2}{4x^2+8}+\frac{5}{6x^2+12}=\frac{2}{4(x^2+2)}+\frac{5}{6(x^2+2)}=\frac{2\cdot\boxed{3}}{4(x^2+2)\cdot\boxed{3}}+\frac{5\cdot\boxed{2}}{6(x^2+2)\cdot\boxed{2}}=....$

Hier hat man für den Hauptnenner das kgV aus 4 und 6 benötigt, er ist 12 und **<u>nicht</u>** $4\cdot6=24$.

Denn es ist $4=2\cdot2$

und $6=\quad 2\cdot3$

Und beide Produkte sind bereits in $HN=2\cdot2\cdot3$ enthalten.

Also muss man den ersten Bruch mit $\boxed{3}$ erweitern und den zweiten mit $\boxed{2}$:

Dann geht die Rechnung so weiter: $=\frac{6}{12(x^2+2)}+\frac{10}{12(x^2+2)}=\frac{16}{12(x^2+2)}=\frac{4}{3(x^2+2)}$

c) $\frac{2}{x-5}-\frac{1}{5-x}$

Hier hilft dieser Trick weiter: $(5-x)=-(x-5)$

Klammert man aus einer <u>Differenz</u> den Faktor -1 aus (also im Grunde das Minuszeichen), dann erscheint die vertausche Differenz. Und dann haben beide Brüche denselben Nenner:

Also kann man den 2. Bruch so verändern: $-\frac{1}{5-x}=-\frac{1}{-(x-5)}=+\frac{1}{x-5}$

Die beiden Minuszeichen ergeben ein Plus.

Die ganze Lösung: $\frac{2}{x-5}-\frac{1}{5-x}=\frac{2}{x-5}-\frac{1}{-(x-5)}=\frac{2}{x-5}+\frac{1}{(x-5)}=\frac{3}{x-5}$

d) $\frac{x^2}{x^2+4x}+\frac{2}{x}$

Hier wird man aus dem ersten Nenner x ausklammern:

$$\frac{x^2}{x^2+4x}+\frac{2}{x}=\frac{x^2}{x(x+4)}+\frac{2}{x}$$

Dann muss man noch den zweiten Bruch mit (x+4) erweitern, damit beide Brüche den gleichen Nenner haben:

$$\frac{x^2}{x^2+4x}+\frac{2}{x}=\frac{x^2}{\underbrace{x(x+4)}_{\text{x ausgeklammert}}}+\frac{2\cdot(x+4)}{\underbrace{x\cdot(x+4)}_{\text{mit }(x+4)\text{ erwitert}}}=\frac{x^2}{\underbrace{x(x+4)}_{\text{Hauptnenner}}}+\frac{2x+8}{x\cdot(x+4)}=\frac{x^2+2x+8}{x^2+4x}$$

Sobald man sie den gleichen Nenner haben, kann man die Zähler addieren und auch den gemeinsamen Nenner wieder ausmultiplizieren.

e) $\frac{12}{x-2}+\frac{5}{3x^2-6x}$

Man sollte aus dem 2. Nenner 3x ausklammern:

$$\ldots=\frac{12}{x-2}+\frac{5}{3x(x-2)}=\ldots.$$

Dann sieht man, dass der erste Bruch nur noch mit 3x erweitert werden muss, damit beide denselben Nenner haben!

$$\ldots=\frac{\boxed{3x}\cdot 12}{\boxed{3x}\cdot(x-2)}+\frac{5}{3x(x-2)}=\frac{36x+5}{3x(x-2)}=\frac{36x+5}{3x^2-6x}$$

Am Ende kann man wieder ausmultiplizieren!

2. Möglichkeit:

Es gibt Aufgaben die sind eine Stufe schwieriger, zum Beispiel, weil sie binomische Ausdrücke enthalten.

Das ist jetzt für Fortgeschrittene, die diese drei Formeln schon kennen:

Übungen dazu in 12105

Diese drei binomischen Formeln sollte man kennen, um hier weitermachen zu können:

Die 1. binomische Formel: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

Die 2. binomische Formel: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Die 3. binomische Formel: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

a) $\dfrac{36}{x^2-16}+\dfrac{x}{x-4}$

Der erste Nenner kann unter Anwendung der 3. binomischen Formel faktorisiert werden: $x^2-16=(x-4)(x+4)$

$=\dfrac{36}{(x+4)(x-4)}+\dfrac{x}{x-4}$

Man ernennt, dass man einfach den 2. Bruch mit dem Faktor $(x+4)$ erweitern muss, dann haben beide Brüche denselben Nenner:

$$=\frac{36}{(x+4)(x-4)}+\frac{x(x+4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{36}{(x+4)(x-4)}+\frac{x^2+4x}{(x-4)(x+4)}=\frac{x^2+4x+36}{(x-4)(x+4)}.$$

Man könnte den Nenner auch wieder als x^2-16 schreiben.

b) $\dfrac{x^2}{x^2+10x+25}-\dfrac{2}{3x+15}$

Der erste Nenner kann unter Anwendung der 2. binomischen Formel umgeschrieben werden in $x^2+10x+25=(x+5)^2$

Und beim 2. Nenner klammert man 3 aus: $3x+15=3(x+5)$.

Jetzt erkennt man den Hauptnenner: $3(x+5)^2$. Den ersten Bruch erweitert man mit 3, den zweiten mit (x+5):

$$\frac{x^2}{x^2+10x+25}-\frac{2}{3x+15}=\frac{x^2}{(x+5)^2}-\frac{2}{3(x+5)}=\frac{\boxed{3}\cdot x^2}{\boxed{3}\cdot(x+5)^2}-\frac{2\cdot(x+5)}{3(x+5)\cdot(x+5)}$$

Zusammenfassen ergibt dann $=\dfrac{3x^2+2x+10}{3(x+5)^2}$

c) $\dfrac{2x}{x-10}+\dfrac{1}{x^2-20x+100}$

Der 2. Nenner wird durch umgekehrte Anwendung der 2. binomischen Formel zu: $x^2-20x+100=(x-10)^2$:

Man muss also den ersten Bruch mit $(x-10)$ erweitern, dann sind beide Nenner gleich.

$$\frac{2x}{x-10}+\frac{1}{x^2-20x+100}=\frac{2x\cdot(x-10)}{(x-10)\cdot(x-10)}+\frac{1}{(x-10)^2}=\frac{2x^2-20x}{(x-10)^2}+\frac{1}{(x-10)^2}=\frac{2x^2-20x+1}{(x-10)^2}$$

5 Nun noch eine kleine Hausaufgabe

zum Ende der Stunde

Die ersten vier sollten sofort klappen:

(a) $\frac{x}{4}+\frac{x+1}{6}=1$

(b) $\frac{5}{2x+10}-\frac{1}{3x+15}=2$

(c) $\frac{2}{x-4}-\frac{1}{4-x}=3$

(d) $\frac{x^2}{x^2+4x}+\frac{2}{x}=1$

Und hier mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad:

(e) $\frac{36}{x^2-16}+\frac{x}{x-4}=1$

(f) $\frac{x^2}{x^2+10x+25}-\frac{6}{3x+15}=1$

(g) $\frac{2x}{x-10}+\frac{1}{x^2-20x+100}=2$

(h) $\frac{2x}{x+3}+\frac{4}{x^2+x-6}=\frac{2x}{x-2}$

Die Lösungen folgen im Anschluss.

Lösungen der Hausaufgabe

(a) $\frac{x}{4}+\frac{x+1}{6}=1$

$\boxed{\text{1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$ $\mathbb{D}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ (also die ganze Grundmenge) denn kein Nenner wird 0.

$\boxed{\text{2. Schritt : Hauptnenner bestimmen und vereinfachen}}$

Der Hauptnenner ist 12, denn er enthält 4 und 6: $2\cdot\overbrace{2\cdot 3}^{6}=12$ und $\underbrace{2\cdot 2}_{4}\cdot 3=12$

Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner $\frac{x}{4}\cdot\boxed{12}+\frac{x+1}{6}\cdot\boxed{12}=1\cdot\boxed{12}$

Kürzen: $3x+(x+1)\cdot 2=12$

$3x+2x+2=12$

Zusammenfassen: $5x+2=12 \quad |-2$

$5x=10 \quad |:5$

$x=2$

$\boxed{\text{3. Schritt: Kontrolle}}$ Weil $2\in\mathbb{D}$ folgt: $\mathbb{L}=\{2\}$

(b) $\frac{5}{2x+10}-\frac{1}{3x+15}=2$

$\boxed{\text{1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$

Man muss erkennen, dass jeder Nenner einen Faktor enthält, den man ausklammern kann.

1. Nenner $2x+10=2\cdot(x+5)$

2. Nenner: $3x+15=3\cdot(x+5)$

Gemeinsamer Nenner: $2\cdot 3\cdot(x+5)$ (Hauptnenner)

Man erkennt jetzt auch, dass der Nenner nur dann 0 werden kann, wenn die Klammer $(x+5)$ Null wird, also für x = -5.

Daher kennen wir jetzt sofort den **Definitionsbereich** der Gleichung: $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-5\}$

$\boxed{\text{2. Schritt : Mit dem Hauptnenner multiplizieren und vereinfachen}}$ $\frac{5}{2(x+5)}-\frac{1}{3(x+5)}=2$

$$\frac{5}{\cancel{2(x+5)}}\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{(x+5)}-\frac{1}{\cancel{3(x+5)}}\cdot 2\cdot\cancel{3\cdot(x+5)}=2\cdot 2\cdot 3\cdot(x+5)$$

Dies kann man auch gleich so aufschreiben: $5\cdot 3-2=12\cdot(x+5)$

$13=12x+60 \quad |-60$

$-47=12x \quad |:12$

$-\frac{47}{12}=x$

$\boxed{\text{3. Schritt: Kontrolle}}$ Weil $-\frac{45}{12}\in\mathbb{D}$ (und die Probe stimmt) ist $\mathbb{L}=\{-\frac{47}{12}\}$

(c) $\frac{2}{x-4} - \frac{1}{4-x} = 3$

Diese Nenner haben ein ***Merkmal***:
Der zweite Nenner ist die vertauschte Differenz des ersten Nenners. Also gilt: $(4-x) = -(x-4)$

Mit diesem **Ausklammertrick des Minuszeichens** verändert man die Anfangsgleichung in:

$$\frac{2}{x-4} - \frac{1}{-(x-4)} = 3$$

Das Minuszeichen im Nenner darf man vor den Bruch ziehen, dann erhält man

$$\frac{2}{x-4} + \frac{1}{(x-4)} = 3 \quad \text{also} \quad \frac{3}{x-4} = 3$$

Hier erkennt man am schnellsten den **Definitionsbereich** der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$

Division durch 3 ergibt: $\frac{1}{x-4} = 1 \qquad | \cdot (x-4)$

$1 = x - 4 \qquad | +4$

Endgleichung: $5 = x$

Da die Lösungszahl 5 der Endgleichung zu $\mathbb{D}$ gehört, ist $\mathbb{L} = \{5\}$

(d) $\frac{x^2}{x^2+4x} + \frac{2}{x} = 1$

Der erste Nenner hat ein ***Merkmal***, das auffallen **muss**. Jeder Summand dieses Nenners enthält x. **Daher kann man x ausklammern**. Und schon ist dieser Nenner faktorisiert worden:

1. Nenner: $x^2 + 4x = x \cdot (x+4)$

2. Nenner. x

Gemeinsamer Nenner: $x \cdot (x+4)$ (Hauptnenner)

Jetzt den Definitionsbereich ablesen: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\,;-4\}$

Beseitigung der Brüche durch *Multiplikation mit dem Hauptnenner:*

$$\frac{x^2}{x^2+4x} + \frac{2}{x} = 1 \qquad | \cdot x \cdot (x+4)$$

(Nach dieser Multiplikation sind hier auch 0 und – 4 Lösungen.
Nach dem Kürzen aber nicht mehr)

Kürzen: $\frac{x^2}{\cancel{x \cdot (x+4)}} \cdot \cancel{x \cdot (x+4)} + \frac{2}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot (x+4) = 1 \cdot x \cdot (x+4)$

oder gleich so: $x^2 + 2 \cdot (x+4) = x(x+4)$

Daraus folgt: $x^2 + 2x + 8 = x^2 + 4x \qquad |$ - 2x und $-x^2$

$8 = 2x \qquad | :2$

$x = 4$

Da 4 dem Definitionsbereich angehört, gilt: $\mathbb{L} = \{4\}$

Nun die Lösungen der schwierigeren Aufgaben, bei denen man mit den binomischen Formeln Terme faktorisieren muss.

(e) $\frac{36}{x^2-16}+\frac{x}{x-4}=1$

Merkmal: Der 1. Nenner kann durch die 3. binomische Formel faktorisiert werden:

$$x^2-16=(x+4)(x-4)$$

Damit enthält er auch den zweiten Nenner als Faktor, weshalb er Hauptnenner ist!

Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{\pm4\}$

Multiplikation der ***Gleichung mit dem Hauptnenner*** $(x+4)(x-4)$ und kürzen:

$$\frac{36}{\cancel{x^2-16}}\cdot\cancel{(x+4)(x-4)}+\frac{x}{\cancel{x-4}}\cdot(x+4)\cancel{(x-4)}=1\cdot(x+4)(x-4)$$

Oder gleich so: $36+x(x+4)=(x+4)(x-4)$

$36+x^2+4x=x^2-16$ | -36 und $-x^2$

$4x=-52$ | : 4

$x=-13$

Da -13 zum Definitionsbereich gehört folgt: $\mathbb{L}=\{-13\}$

(f) $\frac{x^2}{x^2+10x+25}-\frac{6}{3x+15}=1$

Der 1. Nenner kann durch die 1. binomische Formel faktorisiert werden:

$x^2+10x+25=(x+5)^2$ (Siehe Anhang)

Den 2. Nenner faktorisiert man durch Ausklammern: $3x+15=3\cdot(x+5)$

Damit lautet die Gleichung: $\frac{x^2}{(x+5)^2}-\frac{{}^2\cancel{6}}{\cancel{3}\cdot(x+5)}=1$

Jetzt erkennt man den **Definitionsbereich**: $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-5\}$

Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner $(x+5)^2$ und kürzen:

$$\frac{x^2}{\cancel{(x+5)^2}}\cdot\cancel{(x+5)^2}-\frac{2}{\cancel{(x+5)}}\cdot(x+5)^{\cancel{2}}=1\cdot(x+5)^2$$

Oder gleich so: $x^2-2\cdot(x+5)=(x+5)^2$

Das heißt: $x^2-2x-10=x^2+10x+25$ | $-x^2$

$-2x-10=10x+25$ | +2x - 25

Alles nach rechts: $-35=12x$ | :12

$x=-\frac{35}{12}$

Da diese Lösungszahl zum Definitionsbereich gehört, folgt: $\mathbb{L}=\{-\frac{35}{12}\}$

(g) $\frac{2x}{x-10}+\frac{1}{x^2-20x+100}=2$

Der 2. Nenner kann durch die 2. binomische Formel faktorisiert werden (Siehe Anhang).

Damit lautet die Gleichung: $\frac{2x}{x-10}+\frac{1}{(x-10)^2}=2$

Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{10\}$

Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner $(x-10)^2$ und kürzen:

$$\frac{2x}{\cancel{x-10}}\cdot(x-10)^{\cancel{2}}+\frac{1}{\cancel{(x-10)^2}}\cdot\cancel{(x-10)^2}=2\cdot(x-10)^2$$

bzw. gleich so: $2x\cdot(x-10)+1=2\cdot(x-10)^2$

Ausführlicher: $2x^2-20x+1=2\left(x^2-20x+100\right)$

$2x^2-20x+1=2x^2-40x+200$ | - $2x^2$ - 1

$-20x=-40x+199$ | +40

$20x=199$

$x=\frac{199}{20}$

Da $\frac{199}{20}$ zum Definitionsbereich gehört folgt: $\mathbb{L}=\left\{\frac{199}{20}\right\}$

(h) $\frac{2x}{x+3}+\frac{4}{x^2+x-6}=\frac{2x}{x-2}$

Könnte es sein, dass die drei Nenner in diesem Zusammenhang stehen $(x+3)(x-2)=x^2+x-6$?

Eine Multiplikation bestätigt dies. Damit lautet die Gleichung: $\frac{2x}{x+3}+\frac{4}{(x+3)(x-2)}=\frac{2x}{x-2}$.

Man erkennt damit den Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-3\,;2\}$

und diesen Hauptnenner $(x+3)(x-2)$.

Multiplikation der Gleichung mit $(x+3)(x-2)$ und kürzen:

$$\frac{2x}{\cancel{x+3}}\cdot\cancel{(x+3)}(x-2)+\frac{4}{\cancel{(x+3)(x-2)}}\cdot\cancel{(x+3)(x-2)}=\frac{2x}{\cancel{x-2}}\cdot(x+3)\cancel{(x-2)}$$

bzw. gleich so: $2x\cdot(x-2)+4=2x\cdot(x+3)$

Ausmultiplizieren: $2x^2-4x+4=2x^2+6x$ | $-2x^2$ + 4x

Alles nach rechts: $4=10x$

$x=\frac{2}{5}$

Da $\frac{2}{5}$ zum Definitionsbereich gehört:

$\mathbb{L}=\left\{\frac{2}{5}\right\}$

Anhang

Die erste und zweite binomische Formel kann man für zwei Aufgaben verwenden:

1. mit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bzw. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ kann man Klammern quadrieren:

Z. B: $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ oder $(x-10)^2 = x^2 - 20x + 100$

Die Merkregel lautet: Beide Summanden werden quadriert und dazu kommt das ***doppelte Produkt***.

also so: $(x+12)^2 = x^2 + 12^2 + \boxed{2\cdot x\cdot 12}$ Dann ordnen: $= x^2 + 24x + 144$

Oder so: $(x-9)^2 = x^2 + 9^2 - \boxed{2\cdot x\cdot 9} = x^2 - 18x + 81$

2. Man kann diese Formeln auch umkehren, also von rechts nach links anwenden.

Dann wird aus $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ und $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Diesen Vorgang nennt man faktorisieren. Beispiele:

a) $x^2 + 24x + 144$ soll faktorisiert werden.

Man muss die erste und die dritte Zahl als Quadrate erkennen:

x^2 ist das Quadrat von x und $144 = 12^2$.

Nun hängt alles davon ab, ob in der Mitte das doppelte Produkt steht:

$2\cdot x\cdot 12 = 24x$, das passt so. Also haben wir $x^2 + 24x + 144 = (x+12)^2$

b) $x^2 + 14x + 49$

1. Summand:	x^2 ist das Quadrat von x
3. Summand:	$49 = 7^2$
2. Summand:	$2\cdot x\cdot 7 = 14x$, passt!
Also ist	$x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$

c) $x^2 - 15x + \frac{225}{4}$

1. Summand:	x^2 ist das Quadrat von x
3. Summand:	$\frac{225}{4}$ ist das Quadrat von $\frac{15}{2}$
2. Summand:	$2\cdot x\cdot \frac{15}{2} = 15x$, passt!
Also ist	$x^2 - 15x + \frac{225}{4} = \left(x - \frac{15}{2}\right)^2$

d) $x^2 - 13x + 169$

1. Summand:	x^2 ist das Quadrat von x
3. Summand:	139 ist das Quadrat von 13
2. Summand:	$2\cdot x\cdot 13 = 26x$, passt nicht.
$x^2 - 13x + 169$	lässt sich nicht als $(x-..)^2$ schreiben!