Komplexe Zahlen
Überblick

Zusammenfassung des Stoffes der
ausführlichen Manuskripte 50011 bis 50014

mit sehr vielen Übungsaufgaben, deren Lösungen in den
ausführlichen Texten zu diesen Themen stehen.

Datei Nr. 50010

Stand: 25. November 2018

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

https://mathe-cd.de

Textübersicht

50010	Komplexe Zahlen:	Kompendium der Texte 50010 bis 50014
50011	Komplexe Zahlen 1:	Grundrechenarten, Gaußsche Ebene
50012	Komplexe Zahlen 2:	Vektorielle Darstellung, Polarkoordinaten trigonometrische und exponentielle Darstellung Eulersche Funktion $E(\varphi)$, Regel von Moivre
50013	Komplexe Zahlen 3:	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen Lösung der Gleichungen $z^n = a$ *Sehr viele Beispiele*
50014	Komplexe Zahlen 4	Gleichungen 3. bis 5. Grades, Fundamentalsatz
50015	Komplexe Zahlen 5	Komplexe Funktionen
50016	Komplexe Zahlen 6	Teilmengen der Gauß-Ebene
50017	Komplexe Zahlen 7	Komplexe Zahlenfolgen und Reihen
50018	Komplexe Zahlen 8	Ableitungen, holomorphe Funktionen
50019	Komplexe Zahlen 9	Lineare Gleichungssysteme
50020	Komplexe Zahlen 10	Zusätzliche Übungsaufgaben, gemischt

Inhalt

1 Was sind komplexe Zahlen?

Um die Gleichung $x^2+1=0$ bzw. $x^2=-1$ lösen zu können, hat man als (unbekannte) Zahl das Symbol i eingeführt. Macht man damit die Probe, entsteht $i^2=-1$, was man symbolisch zu $i=\sqrt{-1}$ umformen kann. Verlangt man, dass die Regel $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ hier auch gilt, dann folgt z. B:

$$\sqrt{-4i}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$$

Schauen wir uns an, was man damit gewonnen hat, wenn man die Gleichung $x^2-4x+5=0$ lösen will:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{-1}}{2}=\frac{4\pm2i}{2}=2\pm i$$

Man erkennt, dass man damit tatsächlich *alle* quadratischen Gleichungen lösen kann.
Dabei entstehen „Zahlen" der Form $z=a+b\cdot i$, die man **komplexe Zahlen** nennt.
Dabei heißt a der Realteil von z, und b der Imaginärteil.

Für $z=3-5i$ ist also $\operatorname{Re}(z)=3$ und $\operatorname{Im}(z)=-5$

Für $z=2+i$ ist $\operatorname{Re}(z)=2$ und $\operatorname{Im}(z)=1$

Und für $z=3i$ ist $\operatorname{Re}(z)=0$ und $\operatorname{Im}(z)=3$.

Wichtig ist auch, dass jede komplexe Zahl noch eine Art Partnerzahl besitzt, man nennt sie die zu ihr **konjugiert komplexe Zahl**. Sie entsteht aus $z=a+b\cdot i$ indem man das Vorzeichen des Imaginärteils ändert: Zu $z=3+4i$ ist $\overline{z}=3-4i$ die konjugiert komplexe Zahl,

Zu $z=9-i$ ist $\overline{z}=9+i$ die konjugiert komplexe Zahl.

Man darf sie Zahlen nennen, weil man mit ihnen „rechnen" kann. Und das heißt, dass man Addition und Multiplikation definieren kann, dazu ihre Umkehroperationen Subtraktion und Division. Und dass vor allem die dazu gehörenden Rechengesetzte, die man von den reellen Zahlen her kennt, ihre Gültigkeit haben.

2 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Man addiert / subrahiert zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Realteile und ihre Imaginärteile addiert / subtrahiert

Regel: $\begin{matrix} z_1=a_1+b_1\cdot i \\ z_2=a_2+b_2\cdot i\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i \\ z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\cdot i\end{cases}$

Beispiel: $\begin{matrix} z_1=4+6\cdot i \\ z_2=2-4\cdot i\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=(4+2)+(6+(-4))\cdot i=6+2i \\ z_1-z_2=(4-2)+(6-(-4))\cdot i)=2+10i\end{cases}$

3 Potenzen von i

Potenzieren ist Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst. Besonders wichtig sind diese Kenntnisse:

$i^2=i\cdot i=-1$ $\quad i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$ $\quad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$ $\quad i^{4r+s}=i^{4r}\cdot i^s=\left(i^4\right)^r\cdot i^s=1\cdot i^s=i^s$

4 Multiplikation komplexer Zahlen

Gegeben seien $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$

Dann rechnet man: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + \underbrace{b_1 b_2 \cdot i^2}_{-b_1 \cdot b_2}$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i}$$

Beispiele: $(2+3i)(4+5i) = 8 + 10i + 12i + 15i^2 = (8-15) + (10+12)i = -7 + 22i$

$(4+i)(6-2i) = 24 - 8i + 6i - 2i^2 = \cancel{(24+2)+(-8+6)i} = 26 - 2i$

Den durchgestrichenen Term lassen geübte Rechner weg, denn $\boxed{-i^2 = 1}$

5 Binomische Formeln:

WISSEN: $\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$ und $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$ sowie $\boxed{(a + b \cdot i)(a - b \cdot i) = a^2 + b^2}$

Also: $(3-2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

$(4+3i)(4-3i) = 16 - 9i^2 = 16 + 9 = 25$

Die große Formel lautet: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k}$ $\binom{n}{k}$ ist ein Binomialkoeffizient.

Speziell für n = 3: $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

Für n = 4: $(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

Beispiel: $(2+i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$

6 Division komplexer Zahlen

Bei den meisten Divisionsaufgaben wird die 4. Binomische Formel benötigt. Durch **Erweiterung mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl** wird im Nenner eine reelle Zahl erzeugt:

$$\frac{3-2i}{4+5i} = \frac{(3-2i) \cdot (4-5i)}{(4+5i) \cdot (4-5i)} =$$

Im Nenner wird die 3. Binomische Formel angewandt: $(4+5i) \cdot (4-5i) = 4^2 + 5^2 = 41$:

$$= \frac{12 - 15i - 8i + \boxed{10i^2}}{16 - 25i^2} = \frac{12 - 15i - 8i \boxed{-10}}{16 + 25} = \frac{2 - 23i}{41} = \frac{2}{41} - \frac{23}{41} i$$

Allgemein: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}$ oder $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$

Noch ein Beispiel: $\frac{16+8i}{2-4i} = \frac{(16+8i) \cdot (2+4i)}{(2-4i) \cdot (2+4i)} = \frac{32 - 32 + 16i + 64i}{4 + 16} = \frac{80\,i}{20} = 4i$

7 Übungsaufgaben zu den Grundrechenarten

Ausführliche Lösungen im Text 50011 – Seite 21 bis 28

Aufgabe 1

a) $2 \cdot 3i$ b) $-3i \cdot 6i$ c) $(-3i) \cdot (-4i)$ d) $i^3 \cdot 4i^2$

e) $i^5 \cdot i$ f) $\frac{4i^3}{2i^5}$ g) $\frac{4i^2}{5i}$ h) $1 + \frac{1}{i^2}$

i) $i^6 + \frac{3}{i^2}$ j) $\frac{1}{(-i)^3} - i$ k) $\frac{2}{i} + \frac{3}{i^3}$ l) $(2i^3)^{-3}$

Aufgabe 2

a) $\sqrt{-36}$ b) $\sqrt{-169}$ c) $\sqrt{-48}$ d) $\sqrt{-3}^3$

e) $\frac{4}{\sqrt{-2}}$ f) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$ g) $\frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}$ h) $\frac{24}{\sqrt{-12} + \sqrt{-18}}$

Aufgabe 3

a) $(12 + 15i) + (7 + 4i)$ b) $(-2 + 5i) + (7 - 2i)$

c) $(-3 - i) + (1 - 5i)$ d) $(5 + 2i) + (-5 - 2i)$

e) $(7 - 3i) + (-7 + 9i)$ f) $(1 + i) + (-2 - i)$

g) $(7 + 12i) + (-8i)$ h) $\left(\frac{4}{5} - i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}i\right)$

i) $\left(-2 - \frac{2}{5}i\right) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{4}i\right)$ j) $\left(-\frac{6}{7} + \frac{4}{5}i\right) + (2 - 2i)$

k) $z_1 = -13 + i \cdot \sqrt{3}$, $z_1 + z_1^* = ?$

l) $z_2 = 5 - 8i$, $z_2 + z_2^* = ?$

m) $z_3 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$, $z_3 + z_3^* = ?$

n) $z_4 = \frac{5}{8} - \frac{3}{2}i$, $z_4 + z_4^* = ?$

Aufgabe 4

a) $(12 + 15i) - (7 + 4i)$ b) $(-2 + 5i) - (7 - 2i)$

c) $(-3 - i) - (1 - 5i)$ d) $(5 + 2i) - (-5 - 2i)$

e) $(7 - 3i) - (-7 + 9i)$ f) $(1 + i) - (-2 - i)$

g) $(7 + 12i) - (-8i)$ h) $\left(\frac{4}{5} - i\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}i\right)$

i) $\left(-2 - \frac{2}{5}i\right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{4}i\right)$ j) $\left(-\frac{6}{7} + \frac{4}{5}i\right) - (2 - 2i)$

k) $z_1 = -13 + i \cdot \sqrt{3}$, $z_1 - z_1^* = ?$

l) $z_2 = 5 - 8i$, $z_2 - z_2^* = ?$

m) $z_3 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$, $z_3 - z_3^* = ?$

n) $z_4 = \frac{5}{8} - \frac{3}{2}i$, $z_4 - z_4^* = ?$

Aufgabe 5

a) $(2+3i)(4+7i)$ b) $(3-8i)(5+2i)$ c) $(12-i)(1-12i)$

d) $(-3+2i)(6-2i)$ e) $(5+2i)(5-2i)$ f) $(-2-7i)(-3-8i)$

Berechne $z \cdot z^*$ für

g) $z = 2+i$ h) $z = 19-15i$ i) $z = \sqrt{11}+5i$

Aufgabe 6

Bringe das Ergebnis auf die Form a + bi

a) $\frac{4}{8+3i}$ b) $\frac{i}{4-i}$ c) $\frac{2+3i}{2-3i}$ d) $\frac{4+2i}{2+4i}$

e) $\frac{8-8i}{2+2i}$ f) $\frac{1-i}{i-2}$ g) $\frac{12+5i}{13-8i}$ h) $\frac{1-4i}{5+6i}$

Aufgabe 7

Berechne die Kehrwerte zu diesen Zahlen:

a) $-4+5\cdot i$ b) $-12-5i$ c) $\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$ d) $\frac{2}{7}\sqrt{6}-\frac{5}{7}$

Aufgabe 8

Verwende die üblichen Binomischen Gesetze.

a) $\frac{3+2i}{(5-3i)^2}$ b) $\frac{2+10i}{(4+i)^2}$ c) $\frac{3-i}{(3+i)^3}$ d) $\left(\frac{2+7i}{3-2i}\right)^2$

e) $(2+4i)^3$ f) $(5-i)^3$ g) $(3+2i)^4$ h) $\frac{(4+5i)^3}{2-2i}$

Aufgabe 9

Erstelle eine Berechnungsformel für

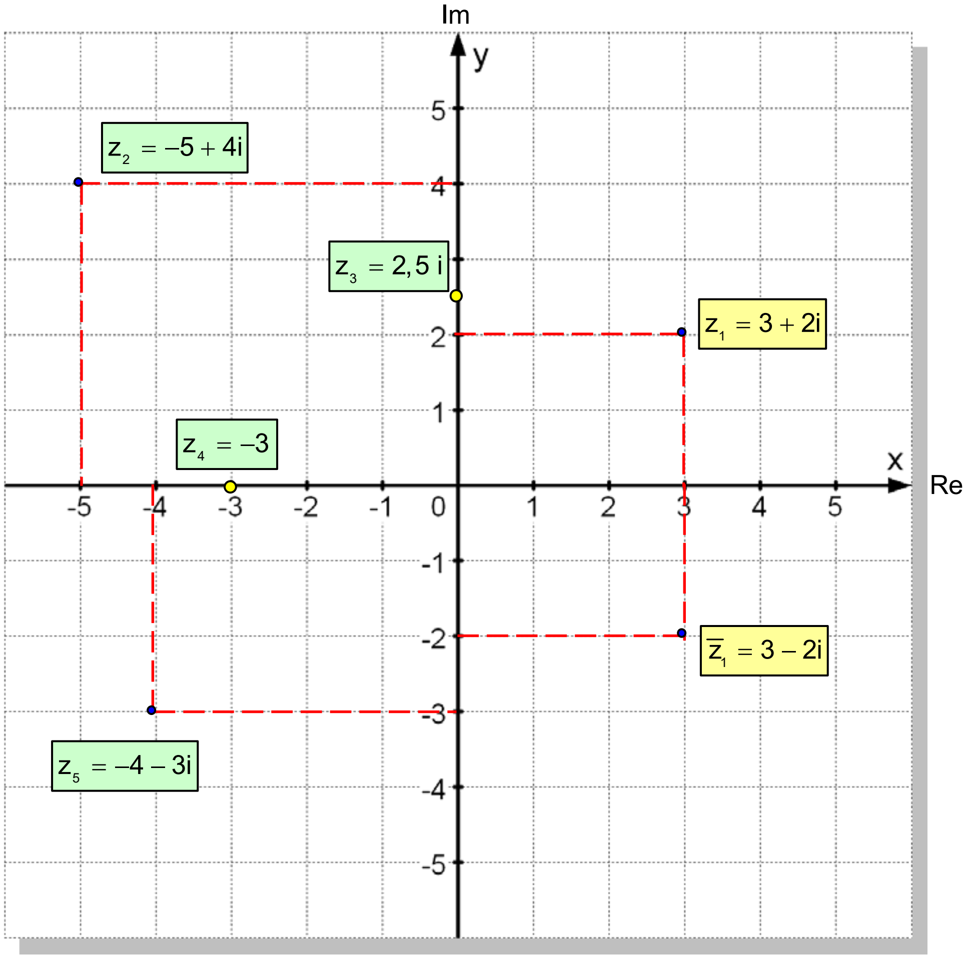
a) $(a+bi)^2$ b) $(a+bi)^3$

8 Gaußsche Zahlenebene

Weil jede komplexe Zahl aus zwei Anteilen zusammengesetzt ist, dem Realteil und dem Imaginärteil, kann man jede komplexe Zahl in einem Koordinatensystem darstellen.
Man nennt dies die Gaußsche Zahlenebene oder auch die Ebene der komplexen Zahlen.

Als x-Koordinate verwendet man den Realteil: $x = \mathrm{Re}(z)$,
als y-Koordinate den Imaginärteil: $y = \mathrm{Im}(z)$.

Die Zahl $z = 3 + 2i$ wird demnach als Punkt mit den Koordinaten $(3\,|\,2)$ dargestellt.



Konjugiert komplexe Zahlen haben den gleichen Realteil und entgegengesetzten Imaginärteil, etwa $z_1 = 3 + 2i$ und $\overline{z} = 3 - 2i$ Ihre Punkte liegen also zueinander spiegelbildlich bezüglich der x-Achse!

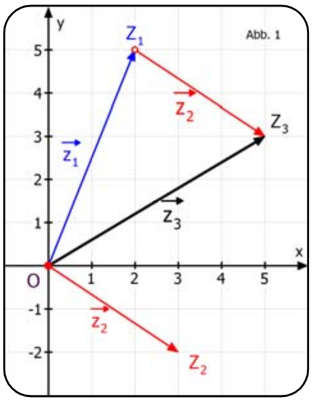
Rein imaginäre Zahlen (ohne Realteil wie z_3) liegen auf der y-Achse, die reellen Zahlen (also ohne einen Imaginärteil wie z_4) liegen auf der x-Achse.

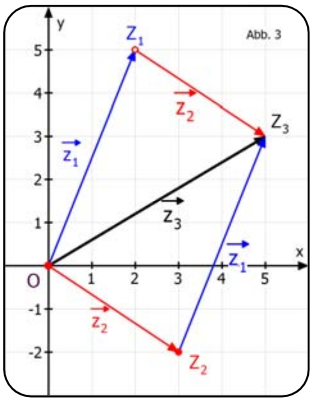
9 Vektorielle Addition bzw. Subtraktion

Beispiel 1: Wir addieren $z_1 = 2 + 5i$ und $z_2 = 3 - 2i$.

In Abb. 1 wurde ein zweiter Pfeil des Vektors $\vec{z}_2$ an den Zeiger von $\vec{z}_1$ angehängt.
Das stellt die Addition der Vektoren $\vec{z}_1$ und $\vec{z}_2$ dar. Der neue Pfeil $\overrightarrow{OZ_3}$ ist ein Pfeil des Summenvektors $\vec{z}_1 + \vec{z}_2$, den ich mit $\vec{z}_3$ bezeichnet habe.
Er ist der Zeiger der Summe $z_3 = z_1 + z_2 = 5 + 3i$

In Abb. 3 wurde aus den Zeigern von z_1 und z_2 ein **Parallelogramm** $OZ_1Z_3Z_2$ gebildet.
Die Hauptdiagonale $\overrightarrow{OZ_3}$ stellt den Summenvektor, also einen Zeiger von $z_1 + z_2$ dar.





Beispiel 2: Es sei $z_1 = 2 - 3i$ und $z_2 = 5 + 4i$.
Berechne z_1- z_2 und $z_2 - z_1$ und konstruiere das Ergebnis vektoriell.

Abb. 1: Für $\vec{z}_1 - \vec{z}_2$ verbindet man die Spitzen der beiden Zeiger:
Die Spitze des Differenzpfeils muss nach $\vec{z}_1$ zeigen

Man kann die Probe machen, indem man aus der Abbildung eine Addition „herausliest“: $\vec{z}_2 + \vec{z}_3 = \vec{z}_1$
Denn die Pfeile von z_2 und z_3 hangen aneinander, wie es bei der Addition notwendig ist, und das Ergebnis ist dann $\vec{z}_1$
Also folgt daraus: $\vec{z}_3 = \vec{z}_1 - \vec{z}_2$

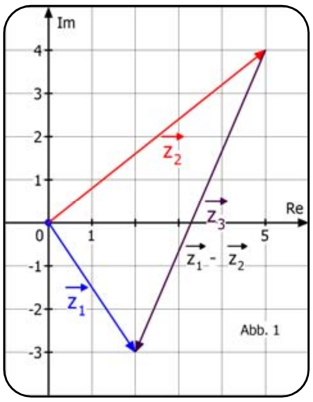
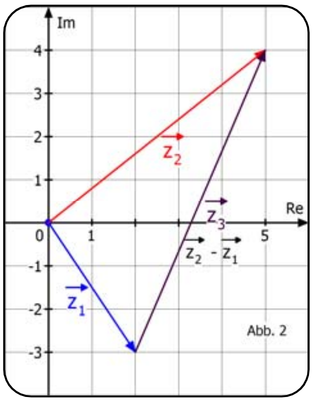


Abb. 2: Für $\vec{z}_2 - \vec{z}_1$ verbindet man auch die Spitzen der beiden Zeiger:
Die Spitze des Differenzpfeils muss jetzt nach $\vec{z}_2$ zeigen

Man kann die Probe machen, indem man aus der Abbildung eine Addition „herausliest“: $\vec{z}_1 + \vec{z}_3 = \vec{z}_2$
Denn die Pfeile von z_1 und z_3 hängen aneinander, wie es bei der Addition notwendig ist, und das Ergebnis ist dann $\vec{z}_2$
Also folgt daraus: $\vec{z}_3 = \vec{z}_2 - \vec{z}_1$



Rechnerische Überprüfung:

Abb. 1: $z_1 - z_2 = (2-3i) - (5+4i) = (2-5) + (-3-4)i = -3 - 7i$
Abb. 2: $z_2 - z_1 = (5+4i) - (2-3i) = (5-2) + (4+3)i = 3 + 7i$

Merke: Der Differenzpfeil verbindet die Spitzen der beiden Pfeile und zeigt zum erstgenannten Pfeil.

10 Übungsaufgaben zur Gaußschen Zahlenebene

Ausführliche Lösungen im Text 50011 – Seite 31 bis 33

Dort haben sie die Nummern 11, 12 und 13

Aufgabe 10

Zeichne die zu diesen komplexen Zahlen gehörenden Punkte in ein Achsenkreuz der Gaußschen Ebene ein und berechne ihren Betrag:

a)	4 – i	b)	3 + 4i	c)	- 3 + 4i	d)	-2 – 3i
e)	- 3i	f)	2 –6i	g)	1 + i	h)	2

Aufgabe 11

Die Punkte der folgenden Zahlen liegen auf einem Kreis um den Ursprung. Zeige dies durch Berechnung des Betrags, zeichne sie ein und finde weitere Punkte dieses Kreises:

9 + 2i , 9 – 2i , - 9 + 2i , - 9 – 2i , 7 + 6i , ... , $4+i\sqrt{69}$, … , $3\sqrt{5}-2i\sqrt{10}$ …

Aufgabe 12:

Zeichne einen Kreis mit Radius $r=\sqrt{85}$. Gib 8 komplexe Zahlen an, deren Bildpunkt auf diesem Kreis liegen und zeichne sie ein. Berechne dazu ihren Betrag.
Welche Gleichung kann man diesem Kreis geben?

Ausführliche Lösungen im Text 50012 – Seite 37

Dort haben sie die Nummern 1 und 2.

Aufgabe 13

Konstruiere die vektorielle Addition der komplexen Zahlen

a) $z_1=-4-2i$ und $z_2=3-i$: $\vec{z}_3=\vec{z}_1+\vec{z}_2$

b) $z_1=7+3i$ und $z_2=3-3i$ $\vec{z}_3=\vec{z}_1+\vec{z}_2$

c) $z_1=2+4i$ und $z_2=-3+i$ $\vec{z}_3=\vec{z}_1+\vec{z}_2$

Aufgabe 14

Konstruiere die vektorielle Subtraktion der komplexen Zahlen

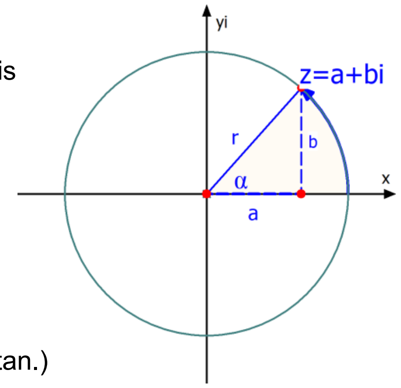
a) $z_1=-4-2i$ und $z_2=3-i$ $\vec{z}_3=\vec{z}_1-\vec{z}_2$

b) $z_1=7+3i$ und $z_2=3-3i$ $\vec{z}_3=\vec{z}_2-\vec{z}_1$

11 Polarkoordinaten

Ein wesentlicher Unterschied zwischen reellen und echt komplexen Zahlen ist die Tatsache, dass man reelle Zahlen der Größe nach vergleichen kann. Man kann also sagen, dass für zwei Zahlen a und b genau eine dieser Relationen gilt: a < b oder a = b oder a > b. Eine dieser drei Beziehungen muss stimmen! Anders ist dies mit komplexen Zahlen wie z_1 und z_2. Sie sind verschieden, aber man kann keine von den beiden größer oder kleiner als die andere nennen!

Man kann jedoch die Lage der „Zahlenpunkte“ durch zwei andere Größen angeben, die auch eine Art von Vergleich ermöglichen:



Dazu denkt man sich durch einen Zahlenpunkt z einen Ursprungskreis gelegt. ***Hier liegt z im 1. Feld***. Dann kann man so argumentieren:

Der Radius dieses Kreises ist $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagoras)

Der Winkel des Radius gegen die positive x-Achse kann durch $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$ berechnet werden. Stellt man nach α um, folgt: $\alpha = \arctan\frac{b}{a}$ (Taschenrechner schreiben $\tan^{-1}$ statt arctan.)

Diese beiden Größen r und α, also Radius und Winkel, legen z eindeutig fest, also auch ohne Kenntnis von a und b. Man nennt sie ***Polarkoordinaten*** von z. Und man gibt ihnen daher noch eigene Namen:

Statt Radius sagt man auch ***Betrag von z*** und schreibt: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

und statt Winkel sagt man ***Argument von z*** und schreibt $\arg(z) = \alpha = \arctan\frac{b}{a}$.

Übrigens gilt auch $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Beispiel für eine Zahl im 1. Feld:

a) z in kartesischen Koordinaten: $z = 2 + i\sqrt{5}$

Betrag: $|z| = \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

Argument; $\alpha = \arg(z) = \arctan\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 48{,}19^\circ$

b) z in Polarkoordinaten: $|z| = \sqrt{8}$ und $\arg(z) = 45^\circ$

Dann hilft die Trigonometrie weiter:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \sin(\alpha) = \sqrt{8} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{16} = \tfrac{1}{2} \cdot 4 = \boxed{2 = \operatorname{Im}(z)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{8} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{16} = \tfrac{1}{2} \cdot 4 = \boxed{2 = \operatorname{Re}(z)}$$

Ergebnis:: $z = 2 + 2i$

Liegt eine komplexe Zahl nicht im 1. Feld, dann wird die Berechnung des Arguments (Winkel) schwieriger, weil dann mit einem anderen rechtwinkligen Dreieck und einem Hilfswinkel gearbeitet werden muss. Im Einzelnen sieht das dann so aus:

Beispiel für eine Zahl im 2. Feld: $z = -4 + 3i$

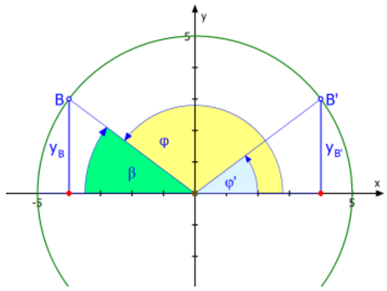
(Achtung: In der Abbildung sind jetzt andere Bezeichnungen verwendet worden)-

Betrag: $|z| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Argument: z **liegt im 2. Feld**, also berechnet man zuerst den

Hilfswinkel $\tan\varphi' = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi' = \arctan\frac{3}{4} \approx 36{,}87^{O} = \beta$

Daraus folgt: $\boxed{\arg(z) = \varphi = 180^{O} - \beta} = 36{,}87^{O} = 143{,}13^{O}$.



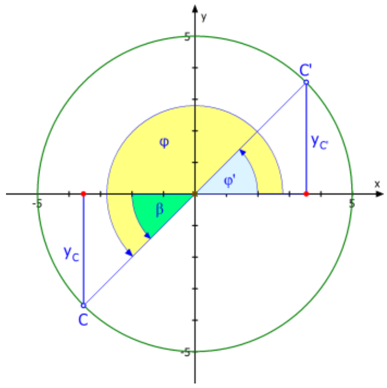
Beispiel für eine Zahl im 3. Feld: $z = -\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{2}\sqrt{2}\cdot i$

Betrag: $|z| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}\cdot 2 + \frac{25}{4}\cdot 2} = \sqrt{25} = 5$

Argument: z **liegt im 3. Feld**, also berechnet man zuerst den

Hilfswinkel $\tan\varphi' = \left|\frac{y}{x}\right| = 1 \Rightarrow \varphi' = 45^{O} = \beta$

Daraus folgt: $\boxed{\arg(z) = \varphi = 180^{O} + \beta} = 180^{O} + 45^{O} = 225^{O}$.



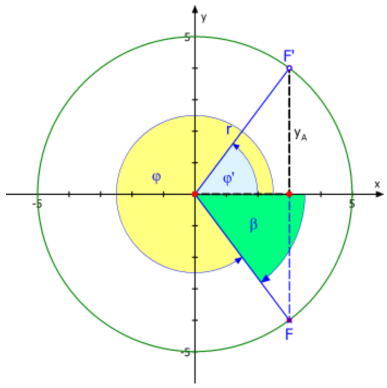
Beispiel für eine Zahl im 4. Feld: $z = 3 - 4i$

Betrag: $|z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Argument: z **liegt im 4. Feld**, also berechnet man zuerst den

Hilfswinkel $\tan\varphi' = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-4}{3}\right| \Rightarrow \varphi' = \arctan\frac{4}{3} \approx 53.13^{O} = \beta$

Daraus folgt: $\boxed{\arg(z) = \varphi = 360^{O} - \beta} \approx 306{,}87^{O}$,



Beispiel für eine Zahl auf einer Koordinatenachse: $z = -5i$

Betrag: $|z| = 5$

Argument: z liegt **auf der negativen y-Achse:** $\boxed{\arg(z) = \varphi = 270^{O}}$

Kurz zusammengefasst:

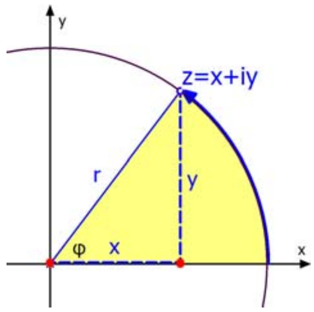
Falls z im 2., im 3. oder im 4. Feld liegt, benötigt man den Hilfswinkel $\varphi' = \arctan\left|\frac{y_A}{x_A}\right| = \beta$

Im 2./3. Feld gilt dann $\varphi = 180^{o} \pm \beta$, im 4. Feld: $\varphi = 360^{o} - \beta$.

Man kann das Argument auch im Bogenmaß berechnen, dann gilt: $180^{o} \triangleq \pi$, $90^{o} \triangleq \frac{\pi}{2}$ usw.

12 Darstellung durch die Eulersche Funktion

Den Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten und den Polarkoordinaten $|z| = r$ und $\arg(z) = \varphi$ liefert die Trigonometrie:



$\boxed{x = r \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\varphi}$

Aus $z = x + y \cdot i$ folgt dann $z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi$

bzw. $\boxed{z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}$ oder $\boxed{z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}$

Man verwendet für den Klammerterm unterschiedliche Abkürzungen:

a) $\boxed{E(\varphi) = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}$ E heißt auch Eulersche Funktion.

ist die trigonometrische Darstellung, Damit folgt: $\boxed{z = |z| \cdot E(\varphi)}$

b) Schließlich gibt es noch die exponentielle Form $\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)}$

Damit folgt: $\boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$ Merke: $\boxed{E(\varphi) = e^{i\varphi}}$

Diese Eulersche Funktion hat hervorragende Eigenschaften, die sich aus den Eigenschaften der Funktionen sin und cos beweisen lassen. Mit ihnen kann man viele Rechnungen einfacher gestalten. Allerdings setzt sie Polarkoordinaten voraus.

13 Eigenschaften der Eulersche Funktion

(0) Definition: $E(\varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

(1) Für jeden Winkel φ gilt: $|E(\varphi)| = 1$

Daher heißt $E(\varphi)$ auch komplexer Einheitsvektor.

(2) E ist eine periodische Funktion. Ihre Periode ist 2π .

d. h. Für alle φ und jedes ganzzahlige k gilt: $E(\varphi + k \cdot 2\pi) = E(\varphi)$

(3) Symmetrie-Eigenschaft: $E(-\varphi) = \cos\varphi - i \cdot \sin\varphi = \underbrace{E(360^{\circ} - \varphi)}_{\text{im Gradmaß}} = \underbrace{E(2\pi - \varphi)}_{\text{im Bogenmaß}}$

(4) Produktregel: $E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)$

(5) Kehrwertregel: $\dfrac{1}{E(\varphi)} = E(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)$

(6) Quotientenregel $\dfrac{E(\varphi_1)}{E(\varphi_2)} = E(\varphi_1 - \varphi_2)$

(6) Potenzregel (Satz von Moivre): $E(\varphi)^n = E(n \cdot \varphi) = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$

und $E(\varphi)^{-n} = E(-n \cdot \varphi)$

14 Rechnen mit Polarkoordinaten

Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ kann man die Polarkoordinaten $|z|$ und $\arg(z) = \varphi$ berechnen.

Damit kann man die Zahl so darstellen: $z = \!\!\rightarrow |z| \cdot E(\varphi) = |z| \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]$.

Multiplikation, Division und Potenzieren sind in dieser Form in vielen Fällen einfacher.

Multiplikation mit Polarkoordinaten: (im Bogenmaß statt Gradmaß)

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = r_1 \cdot [\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)] = r_1 \cdot E(\varphi_1) \\ z_2 = r_2 \cdot [\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)] = r_2 \cdot E(\varphi_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot E(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ \boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]} \end{array}\right.$$

Beispiel: $z_1 = 4 \cdot E\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ und $z_2 = 2 \cdot E\left(\frac{1}{6}\pi\right) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 8 \cdot E\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = 8 \cdot E\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

d. h. $z_1 \cdot z_2 = 8 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) = 8 \cdot (0 + i \cdot 1) = 8i$

In kartesischen Koordinaten sieht diese Rechnung so aus:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(2 + i \cdot 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + i\right) = 2\sqrt{3} + 2i + i \cdot 2 \cdot 3 + i^2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + i \cdot 2 + i \cdot 6 - 2\sqrt{3} = i \cdot 8$$

Division mit Polarkoordinaten: (im Bogenmaß statt Gradmaß)

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = r_1 \cdot [\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)] = r_1 \cdot E(\varphi_1) \\ z_2 = r_2 \cdot [\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)] = r_2 \cdot E(\varphi_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot E(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]} \end{array}\right.$$

Beispiel: $z_1 = 4 \cdot E\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ und $z_2 = 2 \cdot E\left(\frac{1}{6}\pi\right)$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 2 \cdot E\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot E\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

In kartesischen Koordinaten sieht diese Rechnung so aus:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{\left(2 + i \cdot 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)}{\left(\sqrt{3} + i\right) \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)} = \frac{2\sqrt{3} + 6i - 2i - 2\sqrt{3} \cdot i^2}{3 - i^2} = \frac{2\sqrt{3} + 4i + 2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} + i$$

Potenzieren mit Polarkoordinaten:

$$z_1 = r_1 \cdot [\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)] = r_1 \cdot E(\varphi_1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z_1^n = r_1^n \cdot E(n \cdot \varphi_1)} \\ \boxed{z_1^n = r_1^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi_1) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi_1))} \end{array}\right.$$

Beispiel: $z = 1 + i \cdot \frac{3}{4}$. Berechne z^5.

Umrechnung in Polarkoordinaten für das 1. Feld.

Betrag: $|z| = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

Argument: $\varphi = \arctan\frac{\frac{3}{4}}{1} = \arctan\frac{3}{4} \approx 36{,}87^{\circ}$

$$z^5 = r^5 \cdot E(5\varphi) = \frac{3125}{1024} \cdot E\left(184{,}35^{\circ}\right) \approx -3{,}043 - i \cdot 0{,}231$$

15 Übungsaufgaben zu Polarkoordinaten und Euler-Funktion

Ausführliche Lösungen im Text 50012 – Seite 37 bis 44

Die Aufgabennummern in Klammern entsprechen der Nummerierung der Lösungen.

Aufgabe 15 *(3)* Berechne die Polarkoordinaten zu

$A(3\,|\,4),\ A^*(3\,|\,-4),\ B(-4\,|\,3),\ C\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\,|\,-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right),\ D(0\,|\,-5)$ und $E\left(\sqrt{21}\,|\,-2\right)$.

Aufgabe 16 *(4)* Berechne die Polarkoordinaten im Gradmaß und (g) bis (i) im Bogenmaß:

(a)	$z = 12 - 5\,i$	(b)	$-6 + 8\,i$	(c)	$-\sqrt{11} - 5i$
(d)	$-1 - \sqrt{3}$	(e)	$1 - i$	(f)	$5 - i\sqrt{24}$
(g)	$z = -4 + 3i$	(h)	$z = i\sqrt{3}$	(i)	$z = -8 - 5i$

Aufgabe 17 *(5)* Rechne die Polarkoordinaten in Kartesische Koordinaten um.

(a)	$[12\,;60^\circ]$	(b)	$[\sqrt{32}\,;135^\circ]$	(c)	$[15\,;180^\circ]$
(d)	$[4\,;90^\circ]$	(e)	$[8\,;210^\circ]$	(f)	$[\sqrt{18}\,;330^\circ]$
(g)	$[\sqrt{5}\,;135^\circ]$	(h)	$[\sqrt{24}\,;300^\circ]$	(i)	$[6\,;218^\circ]$

Aufgabe 18 *(6)* Gesucht ist die Darstellung mit kartesischen Koordinaten
trigonometrische Darstellung
exponentielle Darstellung

1. Teil: Gegeben sind die kartesischen Koordinaten von z.

a)	$z = 4 - 8i$	b)	$z = 8 + 6i$	c)	$z = -3 + 3i$
d)	$z = -4i$	e)	$z = -\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}$	f)	$z = \sqrt{3} + i$

2. Teil: Gegeben ist die trigonometrische Darstellung, d. h. die Polarkoordinaten von z.

g)	$z = 3 \cdot \left(\cos 55^\circ + i \cdot \sin 55^\circ\right)$	h)	$z = 2 \cdot E\left(270^\circ\right)$	i)	$z = 24 \cdot E\left(104^\circ\right)$
k)	$z = \sqrt{3} \cdot \left(\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ\right)$	l)	$z = E\left(-30^\circ\right)$	m)	$z = 4\sqrt{2} \cdot E\left(225^\circ\right)$

3. Teil: Gegeben die exponentielle Darstellung von z.

n)	$z = 4 \cdot e^{i\,\pi}$	o)	$z = \sqrt{2} \cdot e^{-i/2}$	p)	$z = 5 \cdot e^{11\pi/12 \cdot i}$
q)	$z = 2 \cdot e^{i \cdot 30^\circ}$	r)	$z = 100 \cdot e^{10\,i}$	s)	$z = 6 \cdot e^{-5i}$

Aufgabe 19 *(7)* Berechne unter Anwendung der Eigenschaften der Funktion $E(\varphi)$.

a)	$z = E\left(30^\circ\right) \cdot E\left(90^\circ\right)$	b)	$z = \left[E\left(45^\circ\right)\right]^3$	c)	$z = \left[E\left(240^\circ\right)\right]^2$
d)	$z = E\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$	e)	$z = \dfrac{1}{E\left(135^\circ\right)}$	f)	$z = \dfrac{E\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{E\left(\frac{2}{3}\pi\right)}$

Aufgabe 20 *(8)* Gegeben: $z_1 = 4 \cdot E\left(65^\circ\right)$, $z_2 = 12 \cdot E\left(45^\circ\right)$ und $z_3 = 3 \cdot E\left(115^\circ\right)$

a)	$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$	b)	$\dfrac{z_2}{z_1}$	c)	$\dfrac{1}{z_2}$	d)	$\dfrac{z_2}{z_1 \cdot z_3}$

16 Potenzen von komplexen Zahlen

16.1 Potenzieren von Zahlen in kartesischer Form $\boxed{z = x + iy}$

kann man stufenweise erledigen, d. h. mehrfach eine *binomische Formel* anwenden.

Beispiele:

$$(2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = (4-9)+12i = -5+12i$$

$$(2+3i)^3 = (2+3i)^2\cdot(2+3i) = (-5+12i)\cdot(2+3i) = -10+24i-15i+36i^2 = (-10-36)+(24-15)i = -46+9i$$

$$(2+3i)^4 = \left((2+3i)^2\right)^2 = (-5+12i)^2 = 25-120i+144i^2 = -119-120i$$

16.2 Potenzieren von Zahlen in trigonometrischer Form (Polarform) $\boxed{z = r\cdot E(\varphi)}$

geschieht mit der Moivre-Regel: $E(\varphi)^n = E(n\cdot\varphi)$

Beispiele:

a) $z = 2\cdot E(30^O)$ $\Rightarrow$ $z^2 = 4\cdot E(60^O)$, $z^3 = 8\cdot E(90^O)$, $z^4 = 16\cdot E(120^O)$ usw.

b) $z = 1 + i\cdot\frac{3}{4}$ Umrechnen in Polarkoordinaten, z im 1. Feld.

Betrag: $r = |z| = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

Argument: $\varphi = \arctan\frac{\frac{3}{4}}{1} = \arctan\frac{3}{4} \approx 36{,}87^O$

Polarform: $z = \frac{5}{4}\cdot E(36{,}87^\circ)$

Nach Moivre erhält man daraus (Rechner!)

$$z^2 = r^2\cdot E(2\varphi) = \tfrac{25}{16}\cdot E(73{,}74^O) \approx 0{,}437 + i\cdot 1{,}50$$

$$z^3 = r^3\cdot E(3\varphi) = \tfrac{125}{64}\cdot E(110{,}61^O) \approx -0{,}688 + i\cdot 1{,}828$$

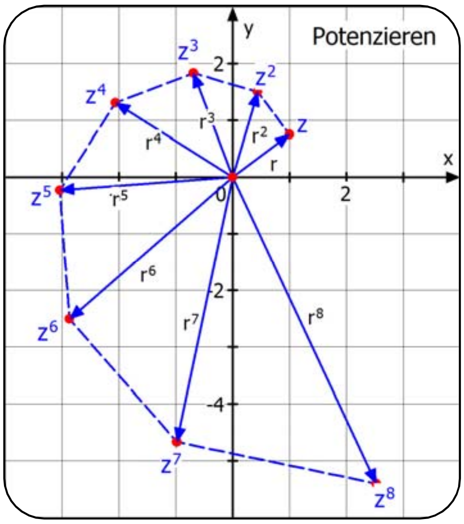
$$z^4 = r^4\cdot E(4\varphi) = \tfrac{625}{256}\cdot E(147{,}48^O) \approx -2{,}059 + i\cdot 1{,}312$$

$$z^5 = r^5\cdot E(5\varphi) = \tfrac{3125}{1024}\cdot E(184{,}35^O) \approx -3{,}043 - i\cdot 0{,}231$$

$$z^6 = r^6\cdot E(6\varphi) \approx -2{,}869 - i\cdot 2{,}514$$

$$z^7 = r^7\cdot E(7\varphi) \approx -0{,}984 - i\cdot 4{,}666$$

$$z^8 = r^8\cdot E(8\varphi) \approx 2{,}515 - i\cdot 5{,}404$$



Die Abbildung zeigt die Potenzen von z als Vektoren. Die Radien wachsen gemäß den Potenzen an, die Winkel zwischen den Zeigern sind immer gleich groß: $\varphi \approx 36{,}87^O$. Das heißt, der Winkel vom Zeiger $\vec{z}^4$ gegen die positive x-Achse ist 4-mal so groß, wie der von z usw., siehe Moivre-Formel!

16.3 Potenzieren von Zahlen in exponentieller Form: Berechne $\left(3\cdot e^{-i\cdot\pi/4}\right)^4$

1. Möglichkeit: $\left(3\cdot e^{i\cdot\pi/4}\right)^4 = 3^4\cdot e^{i\cdot\pi} = 81\cdot e^{i\pi} = 81\cdot(\cos\pi + i\cdot\sin\pi) = 81(-1+i\cdot 0) = -81$

2. Möglichkeit: $\left(3\cdot e^{i\cdot\pi/4}\right)^4 = \left(3\cdot E\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = 3^4\cdot E\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 81\cdot E(\pi) = 81\cdot(\cos\pi + i\cdot\sin\pi) = -81$

17 Wurzeln aus komplexen Zahlen

Zuerst eine Warnung. Die Regel $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ gilt für komplexe Zahlen nicht.

Das zeigt folgendes Beispiel: Ich berechne $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ auf zwei Arten:

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{1}=1$$

Und $$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$$

Sensationell: Wir haben zwei verschiedene Ergebnisse für dieselbe Rechnung!!!???

Wir werden gleich sehen, dass die Wurzeln bei komplexen Zahlen nicht eindeutig sind.

Es gibt zwei verschiedene zweite Wurzeln, drei unterschiedliche dritte Wurzeln usw.

Die Berechnung führen wir durch Potenzieren mit der Formel von Moivre durch.

Beispiel 1: $\sqrt{i}=?$ Dies ist eine Lösung der Gleichung $\boxed{z^2=i}$.

Polarkoordinaten von i: Betrag: $|i|=1$, Argument: $\alpha=90^{\circ}$ oder $\alpha=\frac{\pi}{2}$

Polardarstellung: $i=1\cdot E\left(90^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}\right)$

Lösungsansatz: $z=r\cdot E(\varphi)$ $\quad z^2=r^2\cdot E(2\varphi)$

Vergleichen: $r^2=1 \Rightarrow r=1$

$2\varphi=90^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}$

$\varphi=45^{\circ}+k\cdot 180^{\circ}$

Lösungsformel: $z_k=E\left(45^{\circ}+k\cdot 180^{\circ}\right)$

Also sind die Wurzeln von i: $z_0=E\left(45^{\circ}\right)=\cos\left(45^{\circ}\right)+i\cdot\sin\left(45^{\circ}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$z_1=-z_0=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Beispiel 2: $\sqrt{5+5i}$ Dies ist eine Lösung der Gleichung $\boxed{z^2=5+5i}$.

Polarkoordinaten von $a=5+5i$ Betrag: $|a|=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$

Argument: $\arctan\alpha=\frac{5}{5}=1 \Rightarrow \alpha=45^{\circ}$ bzw. $\frac{\pi}{4}$

Polardarstellung: $a=5\sqrt{2}\cdot E\left(45^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}\right)$

Lösungsansatz: $z=r\cdot E(\varphi)$ $\quad z^2=r^2\cdot E(2\varphi)$

Vergleichen: $r^2=\sqrt{50} \Rightarrow r=\sqrt[4]{50}$

$2\varphi=45^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}$

$\varphi=22{,}5^{\circ}+k\cdot 180^{\circ}$

Lösungsformel: $z_k=r\cdot E\left(22{,}5^{\circ}+k\cdot 180^{\circ}\right)$

Also sind dies die beiden Wurzeln von i:

$$z_0=\sqrt[4]{50}\cdot E\left(22{,}5^{\circ}\right)=\sqrt[4]{50}\left(\cos\left(22{,}5^{\circ}\right)+i\cdot\sin\left(22{,}5^{\circ}\right)\right)=\boxed{2{,}46+i\cdot 1{,}02}$$

$$z_1=-z_0=\boxed{-2{,}46-i\cdot 1{,}02}$$

Beispiel 3: $\sqrt[3]{-1-i}$ ist <u>eine</u> Lösung der Gleichung $\boxed{z^3 = -1-i}$.

Polarkoordinaten von $a = -1-i$ Betrag: $|a| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

a liegt im 3. Feld. Daher gilt: Argument: $\alpha = 180^\circ + \arctan\left|\frac{-1}{-1}\right| = 180^\circ + \underbrace{\arctan(1)}_{45^\circ} = 225^\circ$ bzw. $\frac{5\pi}{4}$

Polardarstellung: $a = \sqrt{2} \cdot E(225^\circ + k \cdot 360^\circ)$ für k = 0, 1, 2.

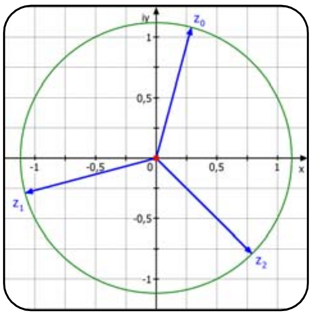
Lösungsansatz: $z = r \cdot E(\varphi)$ $z^3 = r^3 \cdot E(3\varphi)$

Vergleichen: $r^3 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt[6]{2}$

$3\varphi = 225^\circ + k \cdot 360^\circ$

$\varphi = 75^\circ + k \cdot 120^\circ$

Lösungsformel: $z_k = r \cdot E(75^\circ + k \cdot 120^\circ)$



Ergebnis: Dies sind die 3. Wurzeln von i:

$z_0 = \sqrt[6]{2} \cdot E(75^\circ) = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos 75^\circ + i \cdot \sin 75^\circ) \approx 0{,}29 + i \cdot 1{,}08$

$z_1 = \sqrt[6]{2} \cdot E(195^\circ) = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos 195^\circ + i \cdot \sin 195^\circ) \approx -1{,}08 - i \cdot 0{,}29$

$z_2 = \sqrt[6]{2} \cdot E(315^\circ) = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos 315^\circ + i \cdot \sin 315^\circ) \approx 0{,}79 - i \cdot 0{,}79$

Beispiel 4: $\sqrt[4]{3-4i}$ ist <u>eine</u> Lösung der Gleichung $\boxed{z^4 = 3 - i \cdot 4}$.

Polarkoordinaten von $a = 3-4i$. $|a| = \sqrt{9+16} = 5$

Da a im 4. Feld liegt: $\alpha = 360^\circ - \arctan\left|\frac{-4}{3}\right| = 360^\circ - \arctan\frac{4}{3} \approx 360^\circ - 53{,}13^\circ = 306{,}87^\circ$:

Polarform $a = 5 \cdot E(306{,}87^\circ + k \cdot 360^\circ)$

Lösungsansatz: $z = r \cdot E(\varphi)$ $z^4 = r^4 \cdot E(4\varphi)$

Vergleichen: $r^4 = 5 \Rightarrow r = \sqrt[4]{5}$

$4\varphi = 306{,}87^\circ + k \cdot 360^\circ$

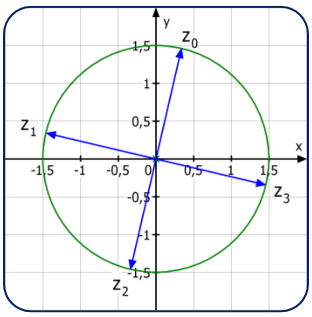
$\varphi = 76{,}7^\circ + k \cdot 90^\circ$

Allgemeine Lösung: Für k = 0, 1, 2, 3 gilt:

$z_k = \sqrt[4]{5} \cdot E\left(\frac{\alpha + k \cdot 360'}{4}\right) = \sqrt[4]{5} \cdot E(76{,}7^\circ + k \cdot 90^\circ) = \sqrt[4]{5} \cdot (\cos(76{,}7^\circ + k \cdot 90^\circ) + i \cdot \sin(76{,}7^\circ + k \cdot 90^\circ))$

$z_0 = \sqrt[4]{5} \cdot (\cos 76{,}7^\circ + i \cdot \sin 76{,}7^\circ) \approx 0{,}34 + i \cdot 1{,}46$ usw.

z(0)	0.344005+1.45524· i
z(1)	-1.45524+0.344005· i
z(2)	-0.344005−1.45524· i
z(3)	1.45524−0.344005· i



18 Übungsaufgaben zu Potenzen und Wurzeln

Ausführliche Lösungen im Text 50013 – Seite 43 bis 53

Die Aufgabennummern in Klammern entsprechen der Nummerierung der Lösungen.

Aufgabe 21 *(1)* Berechne die ersten 4 Potenzen und stelle einige zeichnerisch dar:

a) $z = \frac{1}{2} + i$ b) $1 - i$ c) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ d) $1{,}2 + 0{,}5 \cdot i$ e) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Aufgabe 22 *(2)* Berechne folgende Quadratwurzeln mittels Polarkoordinaten:

a) $\sqrt{4i}$ b) $\sqrt{-2i}$ c) $\sqrt{-4+3i}$

d) $\sqrt{5+5i}$ e) $\sqrt{-5-5i}$ f) $\sqrt{-5+5i}$

g) $\sqrt{6-8i}$ h) $\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$ i) $\sqrt{-1-i\sqrt{3}}$

Aufgabe 23 *(3)* Löse folgende reinquadratische Gleichungen:

a) $z^2 = 15 + i \cdot 20$ b) $z^2 = -2 + i \cdot 2\sqrt{3}$ c) $z^2 = 1 - i$ d) $z^2 = 1 + i \cdot \sqrt{3}$

Aufgabe 24 *(4)*

a) Berechne die Lösungen von $z^3 = -1$ unter Verwendung von Polynomdivision, ausgehend von der bekannten reellen Lösung $z_0 = -1$. Mache die Probe für die beiden komplexen Lösungen und stelle alle drei Lösungen auf dem Einheitskreis dar.

b) Bestimme die Lösungen der Gleichung: $z^3 = i$ und stelle sie auf dem Einheitskreis dar.

c) Bestimme die Lösungen der Gleichung: $z^3 = -i$ und stelle sie auf dem Einheitskreis dar.

Aufgabe 25 *(5)*

a) $z^3 = 27$ b) $\sqrt[3]{-27i}$ c) $\sqrt[3]{-1-i}$

d) $\sqrt[3]{8 \cdot E(120^{\circ})}$ e) $\sqrt[3]{64 \cdot e^{i \cdot 4/3\,\pi}}$

f) $z^3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$ g) $z^3 = 6 + i \cdot 8$

Aufgabe 26 *(6)*

a) $\sqrt[4]{2i}$ b) $\sqrt[4]{-1+i}$ c) $\sqrt[4]{\frac{3}{5} - i \cdot \frac{4}{5}}$

d) $\sqrt[4]{16 \cdot E(120^{\circ})}$ e) $\sqrt[4]{-1}$ f) $\sqrt[4]{-7 + i \cdot 2\sqrt{2}}$

g) $z^4 = -81$ h) $z^4 = 3 - i \cdot 4$ i) $z^4 = i$

j) $z^4 = -16\,i$ k) $z^5 + 32 = 0$ k) $z^6 = -8$

19 Logarithmen zu komplexen Zahlen

Die Gleichung $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ zeigt, dass die komplexe Exponentialfunktion die Periode 2π hat. Daher sind auch Logarithmen im selben Maße periodisch.

Beispiel: Berechnung von $\ln\left(\sqrt{3} + i\right)$

Für das Argument $a = \sqrt{3} + i$ gilt: $|a| = \sqrt{3+1} = 2$

und weil a im 1. Feld liegt: $\alpha = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^O = \frac{\pi}{6}\ (\text{rad})$

Wegen der Periodizität gilt auch: $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

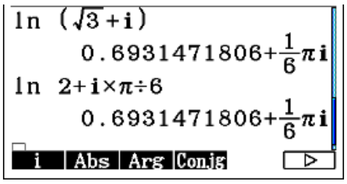
Exponentialform von a: $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$

$a = 2 \cdot e^{i \cdot (\pi/6 + k \cdot 2\pi)}$

Logarithmieren: $\ln a = \ln\left(2 \cdot e^{i \cdot (\pi/6 + k \cdot 2\pi)}\right) = \ln 2 + \ln\left(e^{i \cdot (\pi/6 + k \cdot 2\pi)}\right) = \ln 2 + i \cdot \left(\frac{1}{6} + 2k\right)\pi$

Für k = 0 erhält man den sogenannten **Hauptwert**, den auch der Rechner anzeigt:

$\ln\left(\sqrt{3} + i\right) = \ln 2 + i \cdot \frac{\pi}{6} \approx 0{,}69 + i \cdot 0{,}69$



20 Übungsaufgaben zu Logarithmen

Ausführliche Lösungen im Text 50013 – Seite 59 bis 60

Die Aufgabennummern in Klammern entsprechen der Nummerierung der Lösungen.

Aufgabe 27 *(12)*

Berechne und gib den Hauptwert mit $\alpha \in [0\,;2\pi[$ bzw. mit $\alpha \in]-\pi\,;\pi]$ näherungsweise aus.

a) $\ln\left(-\sqrt{11} + 5i\right)$ b) $\ln\frac{2i-3}{i+5}$ c) $\ln(2-3i)^4$

Aufgabe 28 *(13)*

Berechne für $z_1 = -2i$ und $z_2 = -1 + i$ die Logarithmen $\ln(z_1)$, $\ln(z_2)$ und $\ln(z_1 z_2)$.

Überprüfe, ob hier die Gleichung $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$ gilt.

Rechne für $\alpha \in [0\,;2\pi[$ bzw. für $\alpha \in]-\pi\,;\pi]$

21 Quadratische Gleichungen

21.1 mit reellen Koeffizienten

Aus der Algebra der reellen Zahlen sind drei Methoden bekannt:

- $ax^2 + bx - c = 0$ hat die Lösung: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Mitternachtsformel)
- $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel)
- Lösung durch quadratische Ergänzung.

Dabei existieren nur dann reelle Lösungen, wenn der Radikand in der Lösungsformel nicht negativ ist. Ist dieser aber negativ, entstehen komplexe Lösungen.

Beispiel: $3x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2} \cdot i}{6} = \frac{1}{3} \pm i \cdot \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{\frac{1}{3} + i \cdot \frac{1}{3}\sqrt{2} \,;\, \frac{1}{3} - i \cdot \frac{1}{3}\sqrt{2}\right\}$

21.2 mit komplexen Koeffizienten

Beispiel: $z^2 + 2z + \frac{3}{4}i = 0$ ***mit extrem ausführlicher Lösung zur Einführung.***

Aus später ersichtlichem Grund nummeriere ich die Lösungen so:

$$z_{0,1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{3}{4}i}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3i}}{2} = -1 \pm \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{4-3i}$$

Zuerst die Berechnung der Wurzel $w = \sqrt{4-3i}$ **:**

Polarkoordinaten des Radikanden $rd = 4 - 3i$: $|rd| = \sqrt{16+9} = 5$

Weil rd im 4. Feld liegt $\alpha = 360^\circ - \arctan\frac{3}{4} \approx 360^\circ - 36{,}87^\circ = 323{,}13^\circ$ bzw. $\varphi \approx 5{,}64$

<u>Polardarstellung:</u> $rd = 5 \cdot E\left(323{,}13^\circ + k \cdot 360^\circ\right)$

Lösungsansatz: $w = r \cdot E(\varphi)$, also $w^2 = r^2 \cdot E(2\varphi)$

Vergleichen ergibt: $r^2 = 5 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{5}$

und $2\varphi = 323{,}13^\circ + k \cdot 360^\circ$

und $\varphi_k = 161{,}57^\circ + k \cdot 180^\circ$ für k = 0, 1.

Achtung: Die Nummerierung ist daher φ_0 und φ_1 und nicht mehr φ_1 und φ_2.

Berechnungsformel für die Wurzel:

$$w_k = \sqrt{5} \cdot \left(\cos\left(161{,}57^\circ + k \cdot 180^\circ\right) + i \cdot \sin\left(161{,}57^\circ + k \cdot 180^\circ\right)\right)$$

Das ergibt: $w_0 = r \cdot E(\varphi_0) = \sqrt{5} \cdot \left(\cos 161{,}57^\circ + i \cdot \sin 161{,}57^\circ\right) \approx -2{,}121 + i \cdot 0{,}707$

und $w_1 = r \cdot E(\varphi_1) = \sqrt{5} \cdot \left(\cos 341{,}57^\circ + i \cdot \sin 341{,}57^\circ\right) \approx 2{,}121 - i \cdot 0{,}707$

Damit kann man die beiden Lösungen der Gleichung berechnen:

Unter Verwendung von w_O erhält man:

$$z_{0,1} = -1 \pm \tfrac{1}{2} \cdot w_O = -1 \pm \tfrac{1}{2} \cdot \left(-2{,}121 + i \cdot 0{,}707\right) = -1 \pm \left(-1{,}06 + i \cdot 0{,}35\right) = \begin{cases} -2{,}06 + i \cdot 0{,}35 \\ 0{,}06 - i \cdot 0{,}35 \end{cases}$$

Unter Verwendung von w_1 erhält man dieselben Lösungen:

$$z_{0,1} = -1 \pm \tfrac{1}{2} \cdot w_1 = -1 \pm \tfrac{1}{2} \cdot \left(2{,}121 - i \cdot 0{,}707\right) = -1 \pm \left(1{,}06 - i \cdot 0{,}35\right) = \begin{cases} 0{,}06 - i \cdot 0{,}35 \\ -2{,}06 + i \cdot 0{,}35 \end{cases}$$

Ergebnis: Jede der beiden Wurzeln aus $rd = 4 - 3i$ führt zu den gleichen Lösungen:

$\mathbf{L} = \left\{0{,}06 - i \cdot 0{,}35\,;\, -2{,}06 + i \cdot 0{,}35\right\}$.

Es genügt also, eine Wurzel ausführlich zu berechnen.

Ergebnis: Die Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ hat im Falle eines negativen Radikanden

die beiden Lösungen: $$z_{0,1} = \frac{-b \pm \sqrt{|rd|} \cdot E\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

mit $rd = b^2 - 4ac$

Achtung:

Hier besteht Verwechslungsgefahr, denn wenn man Radikand mit rad abkürzt, kann man rad mit Radiant (Winkel im Bogenmaß) verwechseln. Ich habe hier daher *rd* verwendet.

22 Biquadratische Gleichungen

Beispiel: $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$

Vereinfachung mit der Substitution: $u = z^2$ ergibt: $u^2 - 4u + 16 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-64}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{-3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3} \cdot i$$

Rücksubstitution ergibt: $z = \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{2 \pm i \cdot 2\sqrt{3}}$

Polardarstellung des 1. Radikanden $a = 2 + i \cdot 2\sqrt{3}$

$|a| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$

Und weil a im 1. Feld liegt: $\alpha = \arctan\left|\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}\right| = \arctan\sqrt{3} = 60^O$

Also ist $a = 4 \cdot E\left(60^O + k \cdot 360^O\right)$

Wurzelansatz: $w = r \cdot E(\varphi)$ $w^2 = r^2 \cdot E(2\varphi)$

Vergleichen: $r^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

und: $2\varphi = 60^O + k \cdot 360^O \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = 30^O + k \cdot 180^O$

Wurzelformel: $w_k = 2 \cdot E(\varphi_k) = 2 \cdot \left(\cos\left(30^O + k \cdot 180^O\right) + i \cdot \sin\left(30^O + k \cdot 180^O\right)\right)$

Man benötigt: $w_o = 2 \cdot E(\varphi_0) = 2 \cdot \left(\cos 30^O + i \cdot \sin 30^O\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

Daraus folgen: $z_1 = \sqrt{3} + i$ und $z_2 = -\sqrt{3} - i$

Polardarstellung des 2. Radikanden $a = 2 - i \cdot 2\sqrt{3}$

$|a| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$

a liegt im 4. Feld: $\alpha = 360^O - \arctan\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 360^O - 60^O = 300^O$

Also ist $a = 4 \cdot E\left(300^O + k \cdot 360^O\right)$

Wurzelansatz: $w = r \cdot E(\varphi)$ $w^2 = r^2 \cdot E(2\varphi)$

Vergleichen: $r^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

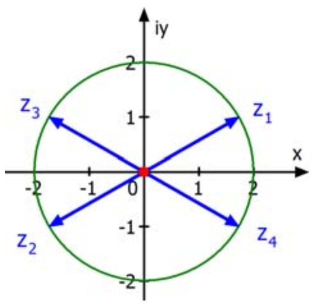
und: $2\varphi = 300^O + k \cdot 360^O \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = 150^O + k \cdot 180^O$

Wurzelformel: $w_k = 2 \cdot E(\varphi_k) = 2 \cdot \left(\cos\left(150^O + k \cdot 180^O\right) + i \cdot \sin\left(150^O + k \cdot 180^O\right)\right)$

Man benötigt: $w_o = 2 \cdot E(\varphi_0) = 2 \cdot \left(\cos 150^O + i \cdot \sin 150^O\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

Daraus folgen: $z_3 = -\sqrt{3} + i$ und $z_4 = +\sqrt{3} - i$

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{\sqrt{3} + i;\ \sqrt{3} - i;\ -\sqrt{3} + i;\ -\sqrt{3} - i\right\}$



23 Eine Gleichung 3. Grades

Aufgabe: Zeige, dass z = i eine Lösung der Gleichung $z^3-(7+i)z^2+(12+7i)z-12i=0$ ist.
Bestimme die restlichen Lösungen.

Probe für z = i: $\text{L.S.} = i^3-(7+i)\cdot i^2+(12+7i)\cdot i-12i=-i+(7+i)+12i-7-12i=0$

Abspaltung des Linearfaktors $(z-i)$ durch

Polynomdivision oder das **Horner-Schema:**

$$\begin{array}{l}
(z^3-(7+i)z^2+(12+7i)z-12i):(z-i)=z^2-7z+12 \\
-(z^3-\quad iz^2) \\
\hline
\quad -7z^2+(12+7i)z \\
\quad -(-7z^2\quad +7iz) \\
\hline
\qquad 12z-12i \\
\qquad -(12z-12i) \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

	1	$-7-i$	$12+7i$	$-12i$
$z=i$	$\boxed{0}$	i	$-7i$	$12i$
	1	-7	12	$\boxed{0}$

Ergebnis: Faktorisierte Gleichung: $(z-i)\cdot\left(z^2-7z+12\right)=0$

Weitere Lösungen folgen aus dem 2. Faktor: $z^2-7z+12=0$:

: $z_{2,3}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\dfrac{7\pm1}{2}=\begin{cases}4\\3\end{cases}$

Lösungsmenge: **L =** $\{i;3;4\}$

24 Übungsaufgaben zu Gleichungen

Ausführliche Lösungen im Text 50014 – Seite 18 bis 23

Die Aufgabennummern in Klammern entsprechen der Nummerierung der Lösung

Aufgabe 29 *(1)*

Bestimme die Lösungsmengen

a) $z^2-6z+12=0$

b) $z^2-5z+\frac{125}{4}=0$

c) $z^2-iz+12=0$

d) $iz^2+4z-4i=0$

e) $z^2+(2+i\cdot4)z+(-3+i\cdot3)=0$

f) $z^2+(4+i\cdot2)z+(4+i\cdot4)=0$

g) $z^2-i\cdot4z-(4+i)=0$

h) $i\cdot z^2+(4-2i)z-(4+3i)=0$

Aufgabe 30 *(2)*

Bestimme die Lösungsmengen

a) $z^4+(1-i)z^2-i=0$

b) $z^4+2z^2+2=0$

c) $z^4+13z^2+36=0$

d) $z^4+i\cdot13z^2-36=0$

Aufgabe 31 *(3)*

Bestimme die Lösungsmengen

a) $z^3-4z^2+13z+50=0$ Es gibt eine ganzzahlige reelle Lösung.

b) $z^3-(7+2i)z^2+(28+10i)z-(8+56i)=0$ Zeige: $z_1=2i$ ist eine Lösung.

c) $z^4-10z^3+66z^2-226z+377=0$ Zeige: $z_1=3-2i$ ist eine Lösung.

d) $z^4-2\sqrt{2}z^3+4z^2-2\sqrt{2}z+3=0$ Zeige: $z_1=-i$ ist eine Lösung.