Integrationsmethoden für gebrochen rationale Funktionen

Übersicht über die wichtigsten Methoden

Vor allem für das Studium!

Text 48050

Stand 18. Februar 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Stoff-Verteilung Integration

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden zu gebrochen rationalen Funktionen
Datei Nr. 48051	Gebrochen rationale Funktionen: Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Gebrochen rationale Funktionen: Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Gebrochen rationale Funktionen: Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48060	Schwere Integrale mit gebrochen rationalen Funktionen
Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Vorwort

Geht man bei der Integration gebrochen rationaler Funktionen über die einfachen „Schulintegrale" hinaus, stößt man schnell an seine Grenzen. Dabei muss man wissen, dass es Funktionen gibt, zu denen es nicht einmal eine Stammfunktion mit Funktionsterm gibt.
Ich habe hier einige Verfahren zusammengestellt und gebe Beispiele dazu an. In anderen Texten der Mathematik-CD der Internetbibliothek für Schulmathematik findet man mehr Beispiele dazu.

Inhalt

1 Drei Grundintegrale

Hinweis: Ich berechne nur unbestimmte Integrale und lasse zur Vereinfachen die Konstante + C weg.

(1) Die **Potenzregel** liefert $\int \frac{1}{x^n}dx = \int x^{-n}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}$ für $n \neq -1$

Beispiele:
$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$
$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x^2}$$

(2) Der Fall $n = 1$ kann von der Potenzregel nicht bedient werden.

Aber es gilt: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

(3) Die Umkehrfunktion zur Funktion $y = \tan(x)$ heißt $y = \arctan(x)$ (und wird auf Taschenrechnern meist mit $\tan^{-1}$ abgekürzt. Ihre Ableitung ist:
$$f(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$
Daraus ergibt sich dieses Grundintegral (das anders nicht berechenbar ist):
$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x)$$

2 Konstante Faktoren

Konstante Faktoren bleiben erhalten:

Beispiele:
$$\int \frac{6}{x^4}dx = 6\cdot\int x^{-4}dx = 6\cdot\frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{2}{x^3}$$
$$\int \frac{2}{x}dx = 2\cdot\ln|x| = \ln x^2$$

3 Merkmal: Der Nenner enthält keine Summe

METHODE: Zerlege den Radikanden in Einzelbrüche.

Beispiele:

(1) $$\int \frac{x^2-4}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)dx = \int\left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx = \int\left(1-4x^{-2}\right)dx = x-4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = x+\frac{4}{x} = \frac{x^2+4}{x}$$

(2) $$\int \frac{x^3-2x}{x^2}dx = \int\left(x-\frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2-2\cdot\ln|x|$$

(3) $$\int \frac{x^2-3x+4}{2x^3}dx = \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}x^{-2}+2x^{-3}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)+2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} = \frac{1}{2}\cdot\ln|x|+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x^2}$$

(4) $$\int \frac{x^2-1}{x^4}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)dx = \int\left(x^{-2}-x^{-4}\right)dx = \frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3} = \frac{-3x^2+1}{3x^3}$$

4 Merkmal: Der Nenner enthält eine lineare Summe, der Zähler enthält kein x

1. Methode: Potenzregel und innere Ableitung:

a) $\int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int (x+2)^{-2} dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x+2}$

b) $\int \frac{1}{(4x-1)^2} dx = \int (4x-1)^{-2} dx = \frac{(4x-1)^{-1}}{-1 \cdot 4} = -\frac{1}{4 \cdot (4x-1)}$

In beiden Fällen kann man zuerst die Potenzregel anwenden, also den negative Exponenten der Klammer um 1 erhöhen und durch diesen neuen Exponenten dividieren. Besitzt x einen Koeffizienten ungleich 1, dann muss man zusätzlich durch ihn (er ist die „innere" Ableitung der Klammer) dividieren. Dies war in b) erforderlich. Die Begründung zeigt die zweite Methode:

2. Methode: Integration durch *einfache* Substitution

a) $\int \frac{1}{(x+2)^2} dx$ wird durch diese Substitution vereinfacht:

$\boxed{u = x+2}$. Dazu bildet man das Differenzial: $\boxed{du = u' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx}$

Also gilt auch $\boxed{dx = du}$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2} \boxed{dx} = \int \frac{1}{u^2} \cdot \boxed{du} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}.$$

Rücksubstitution: $-\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+2}$

Ergebnis: $\int \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2}$

b) $\int \frac{1}{(4x-1)^2} dx$ wird durch diese Substitution vereinfacht:

$\boxed{u = 4x-1}$. Dazu bildet man das Differenzial: $\boxed{du = u' \cdot dx = 4 \cdot dx}$

Also gilt $\boxed{dx = \frac{1}{4} du}$

$$\int \frac{3}{(4x-1)^2} \boxed{dx} = 3 \cdot \int \frac{1}{u^2} \cdot \boxed{\tfrac{1}{4} du} = \frac{3}{4} \cdot \int u^{-2} du = \frac{3}{4} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{3}{4u}$$

Rücksubstitution:

$$\int \frac{3}{(4x-1)^2} dx = -\frac{3}{4(4x-1)}$$

Hinweis: Man erkennt jetzt auch, weshalb man bei der 1. Methode durch die Anbleitung der Klammer dividieren muss.

5 Merkmal: Der Nenner enthält eine lineare Summe, der Zähler enthält x

(1) $\int \frac{x}{(5x+2)^2}dx$ Ganz ausführlich alle Schritte dargestellt:

Jetzt muss auch noch x im Zähler ersetzt werden:

1. Schritt: Substitution: $u = 5x + 2$
2. Schritt: Differential: $du = u' \cdot dx = 5\,dx$
3. Schritt: Nach dx auflösen: $\boxed{dx = \frac{1}{5}du}$
4. Schritt: u nach x auflösen: $x = \frac{1}{5}(u-2)$
5. Schritt: Einzelbrüche herstellen und umschreiben
6. Schritt: „Aufleiten":
7. Schritt: Rücksubstitution:

$$\int \frac{x}{(5x+2)^2}\boxed{dx} = \int \frac{u-2}{5\cdot u^2}\cdot\boxed{\frac{1}{5}du} = \frac{1}{25}\int\frac{u-2}{u^2}du$$

$$= \frac{1}{25}\int\left(\frac{u}{u^2}-\frac{2}{u^2}\right)du = \frac{1}{25}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u^2}\right)du$$

$$= \frac{1}{25}\int\left(\frac{1}{u}-2u^{-2}\right)du$$

$$= \frac{1}{25}\cdot\left[\ln|u| - 2\frac{u^{-1}}{-1}\right] = \frac{1}{25}\left(\ln|u|+\frac{2}{u}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{25}\cdot\left(\ln|5x+2|+\frac{2}{5x+2}\right)$$

(2) $\int \frac{x^2}{(x+3)^2}dx$ Substitution: $u = x + 3$, $du = dx$ und $x = u - 3$

$$= \int\frac{(u-3)^2}{u^2}du = \int\frac{u^2-6u+9}{u^2}du = \int\left(1-\frac{6}{u}+\frac{9}{u^2}\right)du = \int\left(1-\frac{6}{u}+9u^{-2}\right)du = u - 6\cdot\ln|u| - \frac{9}{u}$$

(3) $\int\frac{x^2-1}{x+2}dx$ Substitution: $u = x + 2$ also $du = dx$
und: $x = u - 2$

$$= \int\frac{(u-2)^2-1}{u}du = \int\frac{u^2-4u+3}{u}du = \int\left(u-4+\frac{3}{u}\right)du = \tfrac{1}{2}u^2 - 4u + 3\cdot\ln|u|$$

Rücksubstitution: $= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4(x+2) + 3\cdot\ln|x+2|$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2+4x+4) - 4(x+2) + 3\cdot\ln|x+2|$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 - 2x - 6 + 3\cdot\ln|x+2|$$

6 Merkmal: Der Nenner enthält eine Summe, im Zähler steht ein Vielfaches der Nennerableitung

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

> Das neue Problem liegt darin, dass nach der Substitution des Nenners durch $u = x^2 - 4$ die Substitution von x im Zähler nicht mehr ohne weiteres möglich ist. Denn löst man die Substitution nach x auf, folgt $x^2 = u + 4$ also $x = \pm\sqrt{u+4}$. Dies macht unser Integral komplizierter, so dass diese Möglichkeit entfällt. Die Lösung ist ein ganz simpler Trick: Man berechnet zuerst das Differenzial $du = u'dx = 2x \cdot dx$. Daraus folgt $x \cdot dx = \frac{1}{2}du$. Auf diese Weise gelingt es, $x \cdot dx$ zu ersetzen. Hier die komplette Lösung:

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \int \frac{x\cdot dx}{x^2-4} == \int \frac{\frac{1}{2}du}{u}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{u}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot \ln|u| = \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|$$

Substitution:	$u = x^2 - 4$.
Differenzial:	$du = u'dx = 2x \cdot dx$
Ersetzen von x dx:	$x \cdot dx = \frac{1}{2}du$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \tfrac{1}{2}\cdot\ln|u| = \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left|x^2+1\right|$

Substitution:	$u = x^2 + 1$.
Differenzial:	$du = u'dx = 2x \cdot dx$
Ersetzen von x dx:	$x \cdot dx = \frac{1}{2}du$

Hinweis: Das klappt nicht mehr, wenn der Zähler x+1 heißt, weil dann (x+1)dx nicht mehr im du verschwindet.

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+4}du = \tfrac{1}{2}\int \frac{u-4}{u}du$, denn

$x^3 \cdot dx = x^2 \cdot (x \cdot dx) = (u-4)\cdot \frac{1}{2}du$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{u-4}{u}du = \tfrac{1}{2}\int\left[1-\frac{4}{u}\right]du = \tfrac{1}{2}\cdot\left[u-4\cdot\ln|u|\right] = \tfrac{1}{2}\left(x^2+4\right)-2\cdot\ln\left(x^2+4\right)$$

Da $x^2 + x > 0$ ist, wird dort der Betrag nicht mehr benötigt.

Substitution:	$u = x^2 + 4$.
Differenzial:	$du = u'dx = 2x \cdot dx$
Ersetzen von x dx:	$x \cdot dx = \frac{1}{2}du$
Außerdem ist:	$x^2 = u - 4$

(4) $\displaystyle\int \frac{4-x^2}{\left(x^2+3\right)^2}dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{4-(u-3)}{u^2}du$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{7-u}{u^2}du = \tfrac{1}{2}\int\left[\frac{7}{u^2}-\frac{1}{u}\right]du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int 7u^{-2}du - \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \tfrac{1}{2}\cdot\left[7\frac{u^{-1}}{-1}\right] - \tfrac{1}{2}\ln|u| = -\frac{7}{2u} - \tfrac{1}{2}\ln|u|$$

Rücksubstitution: $\displaystyle = -\frac{7}{2\left(x^2+3\right)} - \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+3\right)$ (Betrag unnötig).

Substitution:	$u = x^2 + 3$.
Differenzial:	$du = u'dx = 2x \cdot dx$
Ersetzen von x dx:	$x \cdot dx = \frac{1}{2}du$
Außerdem ist:	$x^2 = u - 3$

(5) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\left(x^2+6x-12\right)^2}dx$

Die Ableitung des Nenners ist 2x+6, im Zähler steht die Hälfte, also gelingt die

> Substitution: $u = x^2 + 6x - 12$
>
> $du = (2x+6)\cdot dx \;\Rightarrow\; (3+x)\cdot dx = \frac{1}{2}du$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}du}{u^2} = \tfrac{1}{2}\int u^{-2}du = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{-2} = -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2\left(x^2+5x-12\right)}$$

7 Merkmal:

Der Nenner hat mindestens Grad 2 und eine Nullstelle, der Zähler ist kein Vielfaches der Ableitung der Nennerklammer

Dann hilft oft das Verfahren der **Partialbruchzerlegung**. Ausführliches im Text 48051.

Hier vier Beispiele zu verschiedenen Situationen:

(1): $\int \frac{4x-8}{x^2-x-6}dx$ Die Ableitung des Nenners ist $2x-1$.

Der Zähler ist kein Vielfaches davon.

Weitere Merkmal: Der Nenner hat zwei Nullstellen und lässt sich daher faktorisieren:

$x^2-x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2}=\begin{cases}3\\-2\end{cases}$ Also ist $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$,

Grundidee der Partialbruchzerlegung:

Wir fassen $\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)}$ als Summe zweier Brüche auf: $=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$,

deren Zähler wir noch nicht kennen. Wir bestimmen sie durch diese Methode:

Nenner beseitigen: $\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2} \quad | \cdot(x-3)(x+2)$

$4x-8=A\cdot(x+2)+B(x-3)$

Einsetzungsverfahren (z. B. Nennernullstellen einsetzen):

Für x = -2 $\quad -8-8=A\cdot0-5B \quad \Leftrightarrow \quad 5B=16 \quad \Leftrightarrow \quad B=\frac{16}{5}$

Für x = 3: $\quad 12-8=5A+0B \quad \Leftrightarrow \quad 5A=4 \quad \Leftrightarrow \quad A=\frac{4}{5}$

Ergebnis: $\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)}=\frac{\frac{4}{5}}{x-3}+\frac{\frac{16}{5}}{x+2}$

Ergebnis: $\int\frac{4x-8}{x^2-x-6}dx=\int\frac{\frac{4}{5}}{x-3}dx+\int\frac{\frac{16}{5}}{x+2}dx=\frac{14}{5}\cdot\ln|x-3|+\frac{16}{5}\cdot\ln|x+2|$ (Schnellmethode)

(2) $\int\frac{x^3-4x^2}{x^2-4}dx$ Weil der Grad des Zählers größer als der des Nenners ist, muss man den Bruch erst durch Polynomdivision aufspalten:

$$\begin{array}{l}(x^3-4x^2+0x+0):(x^2-4)=x-4\\ -(x^3+0x^2-4x)\\ \hline \quad -4x^2+4x\\ \quad -(-4x^2+0x+16)\\ \hline \qquad +4x-16\end{array}$$

$\Rightarrow f(x)=x-4+\frac{4x-16}{x^2-4}$

oder $\boxed{f(x)=x-4+4\frac{x-4}{x^2-4}}$

Danach zerlegt man $\frac{x-4}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$ wie oben in $\frac{x-4}{x^2-4}=\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}$. Es folgt:

$$\frac{x^3-4x^2}{x^2-4}=x-4+4\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}\right)=x-4+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}$$

Ergebnis: $\int\frac{x^3-4x^2}{x^2-4}dx=\int\left[x-4+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}\right]dx=\frac{1}{2}x^2-4x+2\cdot\ln|x-2|+3\cdot\ln|x+2|$

(3) $\int \frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}dx$ Weil die <u>Nennernullstelle 4 doppelt</u> ist, benötigt man diesen Ansatz:

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4} + \frac{c}{(x-4)^2} \qquad | \cdot x(x-4)^2$$

<u>Einsetzungsverfahren:</u>

$x = 0$ eingesetzt: $(\boxed{0}-1)(\boxed{0}-3) = a\cdot(\boxed{0}-4)^2 + b\cdot\boxed{0}(\boxed{0}-4) + c\cdot\boxed{0} \Leftrightarrow 16a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{16}$

$x = 4$ eingesetzt: $(\boxed{4}-1)(\boxed{4}-3) = a\cdot(\boxed{4}-4)^2 + b\cdot\boxed{4}(\boxed{4}-4) + c\cdot\boxed{4} \Leftrightarrow 4c = 3 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$

$x = 5$ eingesetzt: $(\boxed{5}-1)(\boxed{5}-3) = a\cdot\underbrace{(\boxed{5}-4)^2}_{1} + b\cdot\underbrace{\boxed{5}(\boxed{5}-4)}_{5} + c\cdot\boxed{5}$

Daraus folgt: $8 = a + 5b + 5c$

Umgestellt: $5b = 8 - a - 5c = 8 - \frac{3}{16} - \frac{15}{4} = \frac{128}{16} - \frac{3}{16} - \frac{60}{16} = \frac{65}{16} \Leftrightarrow b = \frac{13}{16}$

Ergebnis: $$\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2} = \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{13}{16}}{x-4} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}$$

$$\int \frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}dx = \int\left[\frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{13}{16}}{x-4} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}\right]dx = \frac{3}{16}\int\frac{1}{x}dx + \frac{13}{16}\int\frac{1}{x-4}dx + \frac{3}{4}\int\frac{1}{(x-4)^2}dx$$

Weiter folgt: $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x|$, $\int\frac{1}{x-4}dx = \ln|x-4|$ (eventuell mit Substitution)

$$\int\frac{1}{(x-4)^2}dx = \int(x-4)^{-2}dx = \frac{(x-4)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x-4}$$

Dann setzt man alles zusammen:

Ergebnis: $$\int \frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}dx = \frac{3}{16}\ln|x| + \frac{13}{16}\ln|x-4| - \frac{3}{4x-16} + C$$

(4) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$ Hier hat der Faktor x-1 die Nullstelle 1, aber der quadratische Term x^2+x+1 nicht. Daher setzt man die Partialbruchzerlegung so an:

$$\frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Der Bruch mit dem quadratischen Nenner muss im Zähler einen linearen Term haben.

Nenner weg: $2x^2+x-1 = A\cdot(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$

Rechte Seite ordnen: $2x^2+x-1 = Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$

$2x^2+x-1 = (A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)$

Jetzt eignet sich die <u>Methode mit dem Koeffizientenvergleich</u>:

Für x^2:	$A+B=2$	(1)
Für x:	$A-B+C=1$	(2)
Absolutglied:	$A-C=-1$	(3)
(3)+(2)	$2A-B=0$	(4)
(1)+(4)	$3A=2 \Rightarrow A=\frac{2}{3}$	
A in (4):	$B=2A=\frac{4}{3}$	
A in (3):	$\frac{2}{3}-C=-1 \Rightarrow C=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$	

$$\frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}}{x^2+x+1}$$

Ergebnis: $$\int\frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{2}{3}\int\frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{3}\int\frac{4x+5}{x^2+x-1}dx$$

Weitere Schritte: siehe 9. Methode

8 Merkmal:

Der Nenner hat den Grad 2 und keine Nullstelle der Zähler enthält kein x

Das Arkustangensverfahren

Beispiele:

(1) $\int \frac{a}{x^2+1}dx = a \cdot \int \frac{1}{x^2+1}dx = a \cdot \arctan(x)$ Dies ist ein Grundintegral (Seite 3).

(2) $\int \frac{10}{x^2-4x+9}dx$

Der Nenner muss durch quadratische Ergänzung und Nachfolgende Substitutionen auf die Form (1) gebracht werden.

Quadratische Ergänzung: x^2-4x+9 hat als Ziel: $(x-2)^2+\square$

Erklärung: $(x-2)^2 = x^2 \boxed{-4x} + 4$ der Summand -4x ist das sogenannte doppelte Produkt der binomischen Formel. Halbiert man den Koeffizienten -4, dann findet man die Zahl -2.

So formt man um: $x^2-4x+9 = (x^2-4x+\underbrace{4)+5}_{=9}$

Man zerlegt also das Absolutglied 9, so dass das erforderliche Quadrat von -1, also 4 erscheint.

Also: $x^2-4x+9 = (x^2-4x+\underbrace{4)+5}_{=9} = (x-2)^2+5$

$$\int \frac{10}{x^2-4x+9}dx = \int \frac{10}{(x-2)^2+5}dx$$

Substitution: $u = x-2 \Rightarrow du = dx$:

$$\int \frac{10}{x^2-4x+9}dx = \int \frac{10}{(x-2)^2+5}dx = \int \frac{10}{u^2+5}du$$

Kürzen durch 5:

$$\int \frac{10}{x^2-4x+9}dx = \int \frac{10}{(x-2)^2+5}dx = \int \frac{10}{u^2+5}du = \int \frac{2}{\frac{u^2}{5}+1}du$$

Im Nenner benötigt man den Term v^2+1. Dies erreicht man durch die neue Substitution $v = \frac{u}{\sqrt{5}}$, also $v^2 = \frac{u^2}{5}$. Ferner ist

$u = \sqrt{5} \cdot v \Rightarrow du = \sqrt{5} \cdot dv$

$$\int \frac{2}{\frac{u^2}{5}+1}du = \int \frac{2}{v^2+1} \cdot \sqrt{5}dv = 2\sqrt{5}\int \frac{1}{v^2+1}dv = 2\sqrt{5} \cdot \arctan(v)$$

Rücksubstituieren: $v = \frac{u}{\sqrt{5}} = \frac{x-2}{\sqrt{5}}$ ergibt:

$$\int \frac{10}{x^2-4x+9}dx = 2\sqrt{5} \cdot \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Weitere Beispiele im Text 48055.

9 Merkmal:
Der Nenner hat Grad 2 und keine Nullstelle der Zähler enthält einen linearen Term

Erweitertes Arkustangensverfahren

Beispiele

$$\int \frac{4x-12}{x^2-4x+7}dx$$

Notwendige Vorarbeit: Nullstellen des Nenners bestimmen

$x^2-4x+7=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-28}}{2}\notin\mathbb{R}$, also keine Nullstellen

Zuerst vergleichen wir dieses Integral mit den beiden folgenden:

$\int \frac{4x-12}{x^2-4x-3}dx$ Hier besitzt der Nenner die Nullstellen 3 und -1, also gilt

$\int \frac{4x-12}{x^2-4x-3}dx=\int \frac{4x-12}{(x-3)(x+1)}dx$ und man kann mit der Methode Partialbruchzerlegung das Integral in zwei einfache zerlegen (Seite 7 ff.).

$\int \frac{4x-8}{x^2-4x+5}dx$ Hier ist der Zähler das Doppelte der Nennerableitung.

Also vereinfacht die Substitution $u=x^2-4x+5$ und $du=(2x-4)dx$ zu

$\int \frac{4x-8}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{2\cdot du}{u}=2\cdot\ln|u|=2\cdot\ln|x^2-4x+5|$ (Seite 6)

Auf das gegebene Integral dagegen ist keine der beiden Methoden direkt anwendbar.

Da der Nenner nicht faktorisiert werden kann, ändern wir der Zähler so ab, dass eine Substitution Möglich wird. Dazu wird eine Nullsumme addiert, so dass im Zähler **4x - 8** entsteht, also das Doppelte der Nennerableitung:

$$\frac{4x-12}{x^2-4x+7}=\frac{4x\boxed{-8+8}-12}{x^2-4x+7}=\frac{4x-8}{x^2-4x+7}+\frac{8-12}{x^2-4x+7}=\frac{4x-8}{x^2-4x+7}+\frac{4}{x^2-4x+7}$$

Damit folgt für das Integral diese Summe:

$$\int \frac{4x-12}{x^2-4x+7}dx=\int \frac{4x-8}{x^2-4x+7}dx+\int \frac{4}{x^2-4x+7}dx$$

Berechnung des 1. Teilintegrals:

$\int \frac{4x-8}{x^2-4x+7}dx$ mit der Substitution: $z=x^2-4x+7 \quad \Rightarrow \quad dz=(2x-4)dx$

$$\int \frac{4x-8}{x^2-4x+7}dx=\int \frac{2\cdot dz}{z}=2\cdot\ln|z|=2\cdot\ln|x^2-4x+7|$$

Berechnung des 2. Teilintegrals:

$\int \frac{4}{x^2-4x+7}dx=\int \frac{4}{(x^2-4x+4)+3}dx=\int \frac{4}{(x-2)^2+3}dx$ (Quadratische Ergänzung)

1. Substitution: $u=x-2 \quad \Rightarrow \quad du=dx$

$$\int \frac{4}{x^2-4x+7}dx=\int \frac{4}{(x^2-4x+4)+7}dx=\int \frac{4}{(x-2)^2+7}dx=\int \frac{4}{u^2+3}du$$

Kürzen durch 3 (Ziel: Im Nenner …+1 statt +3)

$$\int \frac{4}{x^2-4x+7}dx = \ldots = \int \frac{4}{u^2+3}du = \int \frac{\frac{4}{3}}{\frac{u^2}{3}+1}du$$

2. Substitution: $v = \frac{u}{\sqrt{3}}$ damit $v^2 = \frac{u^2}{3}$ wird.

Dann wird $u = \sqrt{3}\cdot v$ und $du = \sqrt{3}\cdot dv$

$$\int \frac{4}{x^2-4x+7}dx = \ldots = \int \frac{4}{u^2+3}du = \int \frac{\frac{4}{3}}{\frac{u^2}{3}+1}du = \int \frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{v^2+1}dv = \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\int \frac{1}{v^2+1}dv = \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\cdot \arctan(v)$$

Doppelte Rücksubstitution:

$$v = \frac{u}{\sqrt{3}} \text{ und } u = x-2 \Rightarrow v = \frac{x-2}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{4}{x^2-4x+7}dx = \frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)$$

Jetzt kann man zusammensetzen und erhält aus

$$\int \frac{4x-12}{x^2-4x+7}dx = \int \frac{4x-8}{x^2-4x+7}dx + \int \frac{4}{x^2-4x+7}dx$$

das **Ergebnis:**

$$\int \frac{4x-12}{x^2-4x+7}dx = 2\cdot \ln\left|x^2-4x+7\right| + \frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)$$

Es lohnt sich, noch einmal über dieses sehr schwere Integral nachzudenken.

Der quadratische Nenner hatte keine Nullstellen und war daher nicht faktorisierbar, weshalb die Partialbruchzerlegung keine Option zur Zerlegung war. Außerdem war der lineare Zähler kein Vielfaches der Nennerableitung. Doch durch die Addition einer Nullsumme konnte der Bruchterm so in zwei Brüche zerlegt werden, dass der erste Bruch durch eine Substitution berechenbar geworden ist (und hat eine ln-Funktion ergeben). Der zweite Bruch enthielt im Zähler nur noch eine Zahl. Daher kann man ihn durch quadratische Ergänzung im Nenner und zwei Substitutionen in eine Arkustangens-Funktion überführen.

Weitere Aufgaben dazu im Text 48055.

10 Reduktionsformel für $\int \frac{1}{\left(ax^2+b\right)^n}dx$

Im Text 48052 wurde durch Umkehrung der partiellen Integration eine Formel hergeleitet, die es gestattet. Das gezeigte Integral auf ein anderes zu „reduzieren", das im Nenner einen um 1 kleineren Exponenten hat.

Die Formel lautet: $\int \frac{1}{\left(ax^2+b\right)^n}dx = \frac{x}{2b(n-1)\left(ax^2+b\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2b(n-1)}\int \frac{1}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}}dx$

Anwendungsbeispiele:

(1) $\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}dx$ mit n = 2, a = 1 und b = 3

$$\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}dx = \frac{x}{6\cdot 1\cdot \left(x^2+3\right)^1} + \frac{1}{6\cdot 1}\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^1}dx$$ oder besser

$$\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}dx = \frac{x}{6\cdot \left(x^2+3\right)} + \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)}dx$$

(2) $\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}dx$ mit n = 3, a = 1 und b = 3

$$\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^3}dx = \frac{x}{6\cdot 3\cdot \left(x^2+3\right)^2} + \frac{3}{6\cdot 2}\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}dx$$ oder besser:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^3}dx = \frac{x}{18\cdot \left(x^2+3\right)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}dx$$

Das reduzierte Integral kann dann aus (1) übernommen werden.

(3) $\int \frac{1}{(x-4)^2}dx$ mit n = 4, a = 1 und b =

Wer diese Formel nicht zur Verfügung hat kann durch die umgekehrte partielle Integration mit zusätzlicher Partialbruchzerlegung auf die Ergebnisse kommen. (Siehe Text 48052).