ANALYSIS

Integration

Grundniveau

Trainingsaufgaben

zum unbestimmten Integral (Stammfunktionen)
und zum bestimmten Integral
mit sehr ausführlichen Erklärungen

Hier nur Integration ohne Substitution

Datei Nr. 48030

Stand 18. Februar 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Viele Bundesländer haben inzwischen den Stoffbereich der Analysis eingeschränkt. Damit werden viele Integrationsmethoden nicht mehr behandelt, u. a. deshalb, weil dazu höherwertige Rechner verwendet werden dürfen. Damit spart man knappe Unterrichtszeit im G8 ☹.

In den Pflichtaufgaben ohne Hilfsmittel werden jedoch bestimmte Grundkenntnisse abgeprüft.
Dazu gehören die Integration von Potenzfunktionen aller Art, von ganzrationalen Funktionen und von gebrochen rationalen Funktionen, zu denen man kein Substitution benötigt.

Dieser Trainingstext passt sich diesem Trend an und bietet Training auf diesem Grundniveau an.

Wer jedoch einen Leistungskurs besucht, in dem Substitution usw. noch behandelt wird, der findet im Text 48012 weitere Aufgaben zum vorliegenden Thema.

Dort gibt es auch zum Inhalt dieses Textes weitere Beispiele und Aufgaben.

Stoff-Verteilung Integration

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden zu gebrochen rationalen Funktionen
Datei Nr. 48051	Gebrochen rationale Funktionen: Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Gebrochen rationale Funktionen: Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Gebrochen rationale Funktionen: Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48060	Schwere Integrale mit gebrochen rationalen Funktionen
Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung
Datei Nr. 48070	Substitutionen mit sin und sinh

Inhalt

1	**Integration von Potenzfunktionen**	**5**
	1.1 Grundwissen	5
	1.2 Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen	6
	1.3 Bestimmte Integrale	8
2	**Integration von ganzrationalen Funktionen**	**11**
	2.1 Unbestimmte Integrale	11
	2.2 Bestimmte Integrale	12
3	**Integration von gebrochen rationalen Funktionen**	**13**
	3.1 Verschiedene Methoden für drei Typen von Funktionstermen	13
	3.2 Unbestimmte Integrale – Typ 1 (im Nenner keine Summe)	13
	3.3 Bestimmte Integrale – Typ 1	14
	3.4 Unbestimmte Integrale – Typ 2 (im Zähler kein x)	15
	3.5 Bestimmte Integrale – Typ 2	16
4	**Integration von einfachen Wurzelfunktionen**	**17**
	4.1 Unbestimmte Integrale: Ohne Summe im Radikanden	17
	4.2 Unbestimmte Integrale: Radikand vom Typ ax+b	18
	4.3 Bestimmte Integrale: Ohne Summe im Radikanden	19
	4.4 Bestimmte Integrale: Radikand vom Typ ax+b	20
5	**Integration von einfachen Exponentialfunktionen**	**21**
	5.1 Unbestimmte Integrale	21
	5.2 Bestimmte Integrale	22
6	**Integration von einfachen trigonometrischen Funktionen**	**24**
	6.1 Unbestimmte Integrale	24
	6.2 Bestimmte Integrale	25
7	Erstellung von bestimmten Stammfunktionen	27
8	Zusammenstellung aller Übungsaufgaben	29
	Lösung aller Aufgaben	34 - 59

1 Integration von Potenzfunktionen

1.1 Grundwissen

Leitet man eine Funktion ab, dann erhält man „natürlich“ ihre Ableitungsfunktion. Macht man diesen Vorgang rückgängig, erhält man eine Funktion, die man „**eine** Stammfunktion“ nennt.

a) Grundfunktion: $f(x) = x^2$ Ableitungsfunktion: $f'(x) = 2x$

$f(x) = x^2 + 5$ $f'(x) = 2x$

$f(x) = x^2 - \frac{3}{2}$ $f'(x) = 2x$

Weil das Absolutglied bei der Ableitung Null wird, haben diese drei (und eigentlich die Funktion $f(x) = x^2 + C$) alle dieselbe Ableitungsfunktion.

Nun kehren wir diesen Vorgang um und „leiten auf“:

Grundfunktion: $f(x) = 2x$ **Stammfunktion:** $F(x) = x^2 + C$

Integralschreibweise: $F(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$

b) Grundfunktion: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

Umkehrung:

Grundfunktion: $f(x) = x^2$ **Stammfunktion:** $F(x) = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Wir benötigen hierzu diese beiden **Integrationsregeln:**

1. **Potenzregel:** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$

In Worten: **Der Exponent wird um 1 erhöht,**
und dann teilt man durch den neuen Exponenten.

Dies ist jedoch nur möglich, wenn der Exponent n nicht – 1 ist:

$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx \overset{?}{=} \cancel{\frac{x^0}{0}} + C$ ist wegen der Division durch 0 nicht möglich.

Ausnahmeregel: $\int \frac{1}{x} dx = |\ln(x)| + C$

2. **Konstante Faktorenregel**: $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Integrieren unverändert stehen.

1.2 Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen zu Potenzfunktionen

Beispiele:

a) $\int 5x^4dx = 5\int \cancel{x^4dx} = \boxed{\cancel{5}\cdot\frac{x^5}{\cancel{5}}+C} = x^5 + C$ Das 2. Integral kann wegbleiben.

b) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{x}+C$

Erklärung: $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ und $x^{-1} = \frac{1}{x}$

c) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \boxed{\frac{x^{-2}}{-2}+C} = -\frac{1}{2x^2}+C$

Erklärung: $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ und $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x^2}$

d) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac12}dx = \boxed{\frac{x^{\frac32}}{\frac32}+C} = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac32}+C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

Erklärung: $\sqrt{x} = x^{\frac12}$, $x^{\frac32} = \left(x^{\frac12}\right)^3 = \sqrt{x}^3 = \underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{x}\cdot\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ und $\frac{1}{\frac32} = \frac{2}{3}$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac12}}dx = \int x^{-\frac12}dx = \boxed{\frac{x^{\frac12}}{\frac12}+C} = 2\cdot\sqrt{x}+C$ $\frac{1}{\frac12} = 1\cdot\frac{2}{1} = 2$

Erklärung: $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac12}} = x^{-\frac12}$ und $\frac{1}{\frac12} = 2$ Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

f) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac13}dx = \boxed{\frac{x^{\frac43}}{\frac43}+C} = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac43}+C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

Erklärung: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac13}$ und $x^{\frac43} = x^{1+\frac13} = x^1\cdot x^{\frac13} = x\cdot\sqrt[3]{x}$ und $\frac{1}{\frac43} = \frac{3}{4}$

g) $\int \frac{2}{x^2}dx = 2\cdot\int x^{-2}dx = 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{2}{x}+C$ Die 2 im Zähler tritt als Faktor auf.

h) $\int \frac{1}{4x^2}dx = \boxed{\int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}dx} = \frac{1}{4}\cdot\int x^{-2}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{4x}+C$ Die 4 im Nenner ergibt den Faktor $\frac{1}{4}$.

i) $\int \sqrt{2x}\,dx = \int \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\,dx = \sqrt{2}\cdot\int x^{\frac12}dx = \sqrt{2}\boxed{\frac{x^{\frac32}}{\frac32}+C} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot x^{\frac32}+C = \frac{2}{3}x\sqrt{2x}+C$

Erklärung: Zur Berechnung der Stammfunktion muss man die Wurzel $\sqrt{2x}$ in ein Produkt $\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{x-\text{Potenz}}$ aufsplitten. Der Zahlenfaktor $\sqrt{2}$ bleibt stehen, die x-Potenz wird aufgeleitet.

j) $\int \frac{3}{\sqrt{5x}}dx = \frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{x^{\frac12}}dx = \frac{3}{\sqrt{5}}\int x^{-\frac12}dx = \boxed{\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{x^{\frac12}}{\frac12}+C} = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{x}+C = \frac{6}{\sqrt{5}}\sqrt{x}+C$

Aufgabe 1

a) $\int x^6 dx$ b) $\int 6x^3 dx$ c) $\int \frac{x^2}{2} dx$ d) $\int 3x\, dx$ e) $\int \frac{3}{2} x^5 dx$

Aufgabe 2

a) $\int \frac{1}{x^4} dx$ b) $\int \frac{8}{x^3} dx$ c) $\int \frac{1}{4x^5} dx$ d) $\int \frac{6}{5x^2} dx$ e) $\int \frac{1}{2x} dx$

Aufgabe 3

a) $\int x\sqrt{x}\, dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ c) $\int \sqrt{3x}\, dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}}\, dx$ e) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\, dx$

Lösungen im Lösungsteil am Textende

1.3 Bestimmte Integrale zu Potenzfunktionen

WISSEN:

Mit dem unbestimmten Integral berechnet man Funktionen, genauer gesagt Stammfunktionen. Man benötigt in der Praxis sehr oft die Differenz zweier Funktionswerte einer solchen Stammfunktion. Die zugehörige Berechnung nennt man dann ein bestimmtes Integral.

Ein unbestimmtes Integral liefert also eine Funktion, ein bestimmtes Integral eine Zahl.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ hat diese Stammfunktionen: $F(x) = \int \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{6}x^3 + C$.

Für eine bestimmte Aufgabe benötigt man z. B. diese Differenz:

$$F(2) - F(-1) = \underbrace{\left[F(x)\right]_{-1}^{2}}_{\text{Abkürzende Schreibweise}} = \underbrace{\left[\tfrac{1}{6}x^3 + C\right]_{-1}^{2}}_{\text{Dasselbe, nur ausführlicher}} = \underbrace{\left[\tfrac{1}{6} \cdot 2^3 + C\right]}_{\text{Das ist } F(2)} - \underbrace{\left[\tfrac{1}{6} \cdot (-1)^3 + C\right]}_{\text{Das ist } F(-1)} = \tfrac{8}{6} + C + \tfrac{1}{6} - C = \tfrac{9}{6} = \tfrac{2}{3}$$

Daran erkennt man zweierlei:

1. Für diese Differenz gibt es eine neue Schreibweise: $\left[F(x)\right]_a^b$. Diese bedeutet, dass man zuerst die „obere Grenze“ b einsetzen und deren Funktionswert berechnen soll, und dann dasselbe mit der „unteren Grenze“ a. Anschließend werden beide Werte subtrahiert.

   Ausführlich bedeutet dies also: $\boxed{\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$

2. Beim Unbestimmten Integral, also bei der Stammfunktion, entsteht zunächst immer ein unbekanntes Absolutglied C, weil man dieses bei der Aufleitung der Funktion f(x), deren Term integriert wird, nicht mehr erkennen kann. Beim bestimmten Integral fällt dieses jedoch weg, weil C zweimal auftritt und dann subtrahiert wird. Daher wird man beim bestimmten Integral für die Stammfunktion immer C = 0 verwenden, also im Grunde das C weglassen.

Und so sieht dann die **endgültige Berechnung dieses bestimmten Integrals** aus:

$$\boxed{\int_{-1}^{2} \tfrac{1}{2}x^2 dx = \Big[\underbrace{\tfrac{1}{6}x^3}_{F(x)}\Big]_{-1}^{2} = \underbrace{\left[\tfrac{1}{6} \cdot 2^3\right]}_{F(2)} - \underbrace{\left[\tfrac{1}{6} \cdot (-1)^3\right]}_{F(-1)} = \tfrac{8}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{9}{6} = \tfrac{3}{2}}$$

Drei Musterbeispiele für Potenzfunktionen:

a) $\int_0^3 \frac{1}{3}x^3 dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{81}{4}\right]-\left[\frac{1}{3}\cdot 0\right] = \frac{27}{4}-0 = \frac{27}{4}$

Erklärung: Zuerst wurde die Stammfunktion berechnet: $F(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}$.

Man verwendet dazu C = 0. Man sollte die Nenner zuerst noch nicht miteinander multiplizieren, denn man kann (sehr oft) gleich anschließend kürzen, und Kürzen verkleinert ja bekanntlich Zahlen!

Man kürzt 81 und 3, denn $\frac{81}{3} = 27$. Noch besser ist es jedoch, wenn man 3^4 gar nicht erst berechnet, sondern so kürzt: $\frac{3^4}{3} = 3^3 = 27$ (Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.)

Hinweis: Bei solchen Rechnungen ist es sehr hilfreich, wenn man **Potenzen** im Kopf hat. Es gibt dazu extra ein ***Lernblatt***: 10121 (Ordner Klasse 5-10, Unterordner 10_Klassen 5 bis 7)

b) $\int_1^4 \frac{4}{x^2}dx = \int_1^4 4\cdot x^{-2}dx = \left[4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4 = \left[-\frac{4}{x}\right]_1^4 = \left[-\frac{4}{4}\right]-\left[-\frac{4}{1}\right] = -1+4 = 3$

Erklärung: Zur Berechnung der Stammfunktion muss man den Bruch $\frac{4}{x^2}$ in ein Produkt $\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{x-\text{Potenz}}$ aufsplitten. Der Zahlenfaktor bleibt stehen, die x-Potenz wird aufgeleitet, also der Exponent wird um 1 erhöht, und durch diese neuen Exponenten wird geteilt. Dann setzt man die obere Grenze 4 zuerst ein und kann kürzen, dann setzt man die untere Grenze 1 ein und subtrahiert die Werte.

c) $\int_3^{12}\sqrt{3x}\,dx = \int_3^{12}\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\,dx = \sqrt{3}\cdot\int_3^{12}x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{3}\cdot\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_3^{12} = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_3^{12} = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\left(12\sqrt{12}-3\sqrt{3}\right)$

$= \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(12\cdot2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\underbrace{\left(24\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)}_{=21\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{21}^{7}\cdot\sqrt{3} = 3\cdot2\cdot7 = 42$

Erklärung: Zur Berechnung der Stammfunktion muss man die Wurzel $\sqrt{3x}$ in ein Produkt $\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{x-\text{Potenz}}$ aufsplitten. Der Zahlenfaktor $\sqrt{3}$ bleibt stehen, die x-Potenz wird aufgeleitet, also der Exponent wird um 1 erhöht, und durch diese neuen Exponenten wird geteilt. Dann setzt man die obere Grenze 12 zuerst ein und kann kürzen, dann setzt man die untere Grenze 3 ein und subtrahiert die Werte.

Dabei werden diese Kenntnisse über das Wurzelrechnen benötigt:

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \sqrt{x}^3 = \underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{x}\cdot\sqrt{x} = x\sqrt{x}$, $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 2\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$ und schließlich noch aus dem Bruchrechnen: $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ (Kehrwert!)

Aufgabe 4

a) $\int_1^3 5x^2 dx$ b) $\int_{-3}^3 \frac{1}{3}x^3 dx$ c) $\int_0^1 5x^4 dx$ d) $\int_2^5 \frac{2}{3}x\, dx$ e) $\int_0^2 x^5 dx$

Aufgabe 5

a) $\int_1^4 \frac{5}{x^2} dx$ b) $\int_2^4 \frac{1}{2x^2} dx$ c) $\int_1^4 \frac{1}{(2x)^2} dx$ d) $\int_1^4 \frac{4}{3x^3} dx$ e) $\int_1^2 \frac{5}{x^4} dx$

Aufgabe 6

a) $\int_0^9 \sqrt{x}\, dx$ b) $\int_0^5 \sqrt{5x}\, dx$ c) $\int_2^8 \sqrt{\frac{x}{2}}\, dx$ d) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ e) $\int_3^{12} \frac{1}{\sqrt{3x}} dx$

f) $\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx$ g) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\, dx$ h) $\int_{\frac{1}{2}}^8 \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} dx$ i) $\int_1^9 \frac{3}{x\sqrt{x}} dx$ j) $\int_2^8 \sqrt{\frac{2}{x}}\, dx$

Lösungen im Lösungsteil am Textende

Zusatz zur **Ausnahmeregel**: $\boxed{\int \frac{1}{x} dx = |\ln(x)| + C}$

Beispiel: $\int_1^4 \frac{2}{x} dx = 2 \cdot \int_1^4 \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \left[\ln|x|\right]_1^4 = 2 \cdot (\ln 4 - \ln 1) = 2 \cdot \ln 4$ denn ln 1 =0

$\int_1^e \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln|x|\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e - \ln 1) = \frac{1}{2}$ denn ln e = 1

In beiden Fällen wurde der Integrand in ein Produkt $\boxed{\text{Zahl}} \cdot \boxed{x-\text{Potenz}}$ aufgesplittet:

$\frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x}$ und $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$. Die Zahl bleibt dann als Faktor einfach stehen.

Aufgabe 7

a) $\int_1^4 \frac{5}{x} dx$ b) $\int_2^4 \frac{1}{4x} dx$ c) $\int_1^e \frac{3}{5x} dx$

2 Integration von ganzrationalen Funktionen

2.1 Unbestimmte Integrale zu ganzrationalen Funktionen, Stammfunktionen

Wenn man eine Summe von Termen ableitet, dann besagt die Summenregel für die Ableitung, dass man jeden Summand für sich ableitet:

Grundfunktion:	$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + C$	Ableitung:	$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
Umkehrung:			
Grundfunktion:	$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$	Stammfunktion:	$F(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + C$
a)	Integralschreibweise:	$F(x) = \int (4x^3 + 3x^2 + 2x + C)\,dx = x^4 + x^3 + x^2 + x + C$	

Grundfunktion:	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x + C$	Ableitung:	$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$
Umkehrung:			
Grundfunktion:	$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$	Stammfunktion:	$F(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x + C$
b)	Integralschreibweise:	$F(x) = \int \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2\right)dx = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x + C$	

c) $\int \left(x^2 - 3x + 1\right)dx = \frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$

d) $\int (2x-4)^2\,dx = \int \left(4x^2 - 16x + 16\right)dx = 4\cdot\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 16x + C = \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x + C$

Erklärung: Hier muss man zuerst die zweite binomische Formel zur Anwendung bringen.
Dabei darf man das **Doppelte Produkt** nicht vergessen: $(a-b)^2 = a^2 - \boxed{2ab} + b^2$
also lautet dieses doppelte Produkt hier: $2\cdot a\cdot b = 2\cdot 2x\cdot 4 = 16x$.

Aufgabe 8

a) $\int (3x+1)\,dx$

b) $\int \left(x^2 - 2x - 5\right)dx$

c) $\int \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)dx$

d) $\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2\right)dx$

e) $\int \left(2x^4 - x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right)dx$

f) $\int \left(-\frac{1}{8}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 7\right)dx$

g) $\int (-x+2)^2\,dx$

h) $\int \left(x^2 - x + 3\right)^2 dx$

i) $\int x\left(x^2 - 4x + 3\right)dx$

j) $\int \left(x^2 - 4\right)(x+1)\,dx$

2.2 Bestimmte Integrale zu ganzrationalen Funktionen

Das Grundwissen dazu wurde in 1.3 auf Seite 6 kurz wiederholt.

Beispiele zu ganzrationalen Funktionen:

a) $$\int_1^3 \left(5x^2-3x+7\right)dx = \underbrace{\left[\tfrac{5}{3}x^3-\tfrac{3}{2}x^2+7x\right]_1^3}_{F(x)} = \underbrace{\left[\tfrac{5}{3}\cdot 27-\tfrac{3}{2}\cdot 9+21\right]}_{F(3)} - \underbrace{\left[\tfrac{5}{3}-\tfrac{3}{2}+7\right]}_{F(1)}$$

$$= 45-\tfrac{27}{2}+21-\tfrac{5}{3}+\tfrac{3}{2}-7 = 59-12-\tfrac{5}{3} = 47-\tfrac{5}{3} = 45\tfrac{1}{3} = \tfrac{136}{3}$$

Tipp: Addiere zuerst alle ganzen Zahlen, dann die Brüche mit gleichem Nenner

b) $$\int_0^2 \left(\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{3}x^2-2x+1\right)dx = \left[\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{x^5}{5}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{x^3}{3}-2\cdot\tfrac{x^2}{2}+x\right]_0^2 = \left[\tfrac{1}{20}x^5+\tfrac{1}{9}x^3-x^2+x\right]_0^2$$

$$= \left[\tfrac{32}{20}+\tfrac{8}{9}-4+2\right]-[0] = \tfrac{8}{5}+\tfrac{8}{9}-2 = \tfrac{72+40-90}{45} = \tfrac{22}{45}$$

c) $$\int_{-1}^5 \left(x^4+x^2\right)dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^5 = \left[5^4+\tfrac{1}{3}5^3\right]-\left[-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{3}\right] = 5^3\left(5+\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{3}$$

$$= 125\cdot\tfrac{16}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5} = \tfrac{2001}{3}+\tfrac{1}{5} = \tfrac{10008}{15} \approx 667{,}2$$

d) $$\int_1^3 \left(\tfrac{1}{2}x^3+3x^2+x-7\right)dx = \left[\tfrac{1}{8}x^4+x^3+\tfrac{1}{2}x^2-7x\right]_1^3 =$$

$$= \left[\tfrac{81}{8}+27+\tfrac{9}{2}-21\right]-\left[\tfrac{1}{8}+1+\tfrac{1}{2}-7\right] = \tfrac{80}{8}+\tfrac{8}{2}+6+6 = 10+4+12 = 26$$

Tipp: Zuerst Brüche mit gleichen Nennern addieren:

e) $$\int_{-1}^1 \left(x^2+1\right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^1 =$$

$$= \left[\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right]-\left[-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{3}-1\right] = 2\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right) = 2\cdot\tfrac{3+10+15}{15} = 2\cdot\tfrac{28}{15} = \tfrac{56}{15}$$

Tipp: Klammert man aus der 2. Klammer (-1) aus, ist sie identisch gleich zur ersten Klammer, also kommt diese doppelt vor:

Aufgabe 9

a) $\int_0^4 (2x-5)dx$

b) $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\tfrac{1}{2}x^2-4\right)dx$

c) $\int_{-3}^3 \left(x^3+2x\right)dx$

d) $\int_{-1}^2 \left(x^3-\tfrac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx$

e) $\int_{-4}^4 \left(2x^2-\tfrac{1}{8}x^4\right)dx$

f) $\int_0^1 \left(x^2-4\right)^2 dx$

g) $\int_{-2}^2 \left(\tfrac{1}{2}x+2\right)^2 dx$

h) $\int_2^3 (3x-6)^3 dx$

3 Integration von gebrochen rationalen Funktionen

(Viele Aufgaben dazu finden man auch in 48012)

3.1 Verschiedene Methoden für drei Typen von Funktionstermen

WISSEN: Es gibt drei Typen von gebrochen rationalen Funktionstermen:

Typ 1: **Im Nenner steht keine Summe.** Dann zerlege man den Term in **Einzelbrüche.**

$$\frac{x^2+2x+4}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}=x+2+\frac{4}{x}$$ Jetzt kann man integrieren.

Typ 2: **Im Zähler steht kein x.** Dann bringt man die Funktion in eine **Potenzform**.

$$\frac{16}{(x+3)^2}=16\cdot(x+3)^{-2}$$

Jetzt kann man integrieren, muss aber eine Zusatzregel beachten.

Typ 3: **Im Nenner steht eine Summe <u>und</u> im Zähler steht x**
Dann benötigt man besondere Integrationsmethoden, die in diesem Text nicht behandelt werden. Siehe dazu Text 48012 Abschnitt 3.5 und 3.6 und für bestimmte Integration Text 48013 Seite 9 bis 11.

$\frac{x+1}{x^2-9}$ oder $\frac{2x}{(x-3)^2}$ sind Beispiele dafür, sie werden hier nicht behandelt.

3.2 Unbestimmte Integrale Typ 1

a) $$\int\frac{x^2+4}{x^2}dx=\int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int\left(1+4\cdot x^{-2}\right)dx=x+4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=x-\frac{4}{x}+C$$

b) $$\int\frac{x^4-2x^2+1}{2x^2}dx=\int\left(\frac{x^4}{2x^2}-\frac{2x^2}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2-1+\frac{1}{2}\cdot x^{-2}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{6}x^3+x+\frac{1}{2x}+C$$

Erklärung: Im 3. Integral wurde in $\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{x-\text{Potenz}}$ aufgesplittet! Auch bei c:

c) $$\int\frac{2x+3}{x^2}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\int\left(2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot x^{-2}\right)dx=2\cdot\ln|x|+3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=2\cdot\ln|x|-\frac{3}{x}+C$$

Siehe Aufgabe 2 auf Seite 6

Aufgabe 10

a) $\int\frac{x^2+2}{x^2}dx$ b) $\int\frac{x^4-4x^2+6}{x^2}dx$ c) $\int\frac{x^2-1}{4x^2}dx$

d) $\int\frac{(x^2-3)^2}{x^2}dx$ e) $\int\frac{5x^4-8}{2x^2}dx$ f) $\int\frac{5x+2}{6x}dx$

g) $\int\frac{x^2+4}{2x}dx$ h) $\int\frac{x^2-4x+2}{x^2}dx$ i) $\int\frac{(t^2-1)^2}{2t}dt$

j) $\int\frac{x^4+x^3-2x+1}{4x^2}dx$ k) $\int\frac{2x^4-3x^2+4}{x^3}dx$ l) $\int\frac{x^3-2x^2+6x-1}{3x^2}dx$

3.3 Bestimmte Integrale Typ 1

Beispiele:

a) $\int_1^2 \frac{x^2-4}{x^2}dx = \int_1^2 \left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx = \left[x+\frac{4}{x}\right]_1^2 = [2+2]-[1+4] = -1$

b) $\int_1^4 \frac{x^2+4}{8x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{8x^2}+\frac{4}{8x^2}\right)dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot x^{-2}\right)dx = \left[\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4 = \left[\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right]_1^4 = \left[\frac{1}{8}x-\frac{1}{2x}\right]_1^4 =$

$= \left[\frac{1}{8}\cdot 4-\frac{1}{2\cdot 4}\right]-\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{2\cdot 1}\right] = \frac{4}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\boxed{+}\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{4}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Hier bringt man gleich alles auf den Nenner 8, also ausnahmsweise wird nicht gekürzt sondern einmal erweitert.

c) $\int_1^3 \frac{x-2}{x}dx = \cancel{\int_1^3 \left(1-\frac{2}{x}\right)dx} = \int_1^3 \left(1-2\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left[x-2\cdot\ln|x|\right]_1^3 = [3-2\cdot\ln 3]-\left[1-2\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0}\right] = 2-2\cdot\ln 3$

Auf das 2. Integral kann man verzichten.

d) $\int_2^6 \frac{x^2-4x+6}{x}dx = \int_2^6 \left(\frac{x^2}{x}-\frac{4x}{x}+\frac{6}{x}\right)dx = \int_2^6 \left(x-4+6\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-4x+6\cdot\ln|x|\right]_2^6$

$= [18-24+6\cdot\ln 6]-[2-8+6\cdot\ln 2] = -6+6\cdot\ln 6+6-6\cdot\ln 2 = 6\cdot\ln 6-6\ln 2 = 6\cdot(\ln 6-\ln 2)$

Nun sollte man sich an eine Logarithmusregel erinnern: $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Von rechts nach links angewandt liefert sie: $\ln 6-\ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3$. Also lautet das Ergebnis:

$= 6\cdot\ln 3$.

Aufgabe 11

a)	$\int_1^2 \frac{x^2-16}{2x^2}dx$	b)	$\int_2^4 \frac{x^4-8}{2x^2}dx$	c)	$\int_1^2 \frac{8x^4+2x^2-1}{4x^2}dx$
d)	$\int_{-3}^{-1} \frac{x^2-1}{x^2}dx$	e)	$\int_1^2 \frac{3x^4-2x^2-8}{16x^2}dx$	f)	$\int_1^2 \frac{x^2-3}{x^4}dx$

Aufgabe 12

a)	$\int_1^2 \frac{x^2+9}{x}dx$	b)	$\int_{-4}^{-2} \frac{x^2-2}{4x}dx$	c)	$\int_1^4 \frac{x^2+2x+5}{x^2}dx$
d)	$\int_1^2 \frac{x^3-x^2+x-1}{2x^2}dx$	e)	$\int_2^4 \frac{(x^2-2)^2}{2x}dx$	f)	$\int_1^2 \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

3.4 Unbestimmte Integrale Typ 2

Beispiele: Es geht hier um Funktionsterme, die im Nenner eine Summe haben, aber im Zähler kein x!

a) $$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \int (x+2)^{-2}\,dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x+2} + C$$

Hier wurde genau so aufgeleitet, wie bei $\int \frac{1}{x^2}\,dx$, nur dass statt x eine Summe da steht.

Man sollte, wenn man unsicher ist, ob das so richtig geworden ist, die Probe machen.

Dazu leitet man diese Stammfunktion $F(x) = -\frac{1}{x+2} + C$ ab und sollte wieder auf $\frac{1}{(x+2)^2}$ kommen. Zum Ableiten braucht man wieder die Potenzschreibweise:

$$F(x) = -\frac{1}{x+2} + C = -(x+2)^{-1} + C \xrightarrow{\text{Ableiten}} F'(x) = +(x+1)^{-2}\,\boxed{\cdot 1} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Bitte daran denken, dass man bei der Anwendung der Ableitungs-Potenzregel auf Klammern die Kettenregel anwenden muss, die da besagt, dass man (weil man ja eine Klammer und keine einfache x-Potenz ableitet) noch mit der inneren Ableitung (der Klammer) multiplizieren muss. Diese ist hier die Zahl 1. Hier hat diese innere Ableitung also nichts verändert.

b) **Dieselbe Methode wird jedoch hier zu einem Fehler führen:**

$$\int \frac{1}{(4x-1)^2}\,dx = \int (4x-1)^{-2}\,dx = \frac{(4x-1)^{-1}}{\underbrace{-1}_{\text{falsch!}}} + C = -\frac{1}{4x-1} + C$$

Um zu erkennen, was hier falsch gemacht worden ist, machen wir wie oben die Probe:

$$F(x) = -\frac{1}{4x-1} + C = -(4x-1)^{-1} + C \xrightarrow{\text{Ableiten}} F'(x) = +(4x-1)^{-2}\,\boxed{\cdot 4} = \frac{4}{(4x-1)^2}$$

Wie man sieht taucht plötzlich die innere Ableitung 4 im Zähler auf. Und daher war unser Integrationsergebnis falsch. Nun ist es jedoch leicht, den Fehler zu korrigieren:
Wir müssen bei der Bildung der Stammfunktion zusätzlich durch die innere Ableitung teilen:

$\int (4x-1)^{-2}\,dx$	Exponent der Klammer um 1 erhöhen und durch den neuen Exponent teilen	$\frac{(4x-1)^{-1}}{-1}$	zusätzlich noch durch die innere Ableitung (der Klammer) teilen	$\frac{(4x-1)^{-1}}{-1\cdot\boxed{4}}$

Richtige Berechnung der Stammfunktion:

$$\int \frac{1}{(4x-1)^2}\,dx = \int (4x-1)^{-2}\,dx = \frac{(4x-1)^{-1}}{-1\cdot 4} + C = -\frac{1}{4\cdot(4x-1)} + C$$

Hinweis: Diese Methode, einen Klammerterm zu integrieren, klappt nur bei linearen Klammerinhalten, also der Form (ax+b).
Enthält die Klammer beispielsweise x^2, wird das Ergebnis wieder falsch.
Man kann das jederzeit durch eine Ableitungs-Probe überprüfen.

3.5 Bestimmte Integrale Typ 2

Beispiele

a) $\int_0^2 \frac{4}{(2x+1)^2}dx = 4\int_0^2 (2x+1)^{-2}\,dx = \left[4\frac{(2x+1)^{-1}}{-1\cdot 2}\right]_0^2 = \left[-\frac{2}{2x+1}\right]_0^2 = -\frac{2}{5}+\frac{2}{1} = -\frac{2}{5}+\frac{10}{5} = \frac{8}{5}$

Die obere Grenze wird zuerst eingesetzt, dann die untere, dann wird subtrahiert,

b) $\int_{-1}^{4}\frac{4}{x+2}dx = 4\cdot\int_{-1}^{4}\frac{1}{x+2}dx = 4\cdot\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{4} = 4\cdot(\ln 6-\ln 1) = 4\cdot\ln 6$

denn ln 1 = 0. Das 2. Integral kann man weglassen und sofort die Stammfunktion anschreiben.

Aufgabe 13

a) $\int\frac{1}{(2-x)^2}dx$ b) $\int\frac{20}{(x+6)^3}dx$ c) $\int\frac{24}{(8x-3)^2}dx$ d) $\int\frac{24}{(8x-3)^4}dx$

Aufgabe 14

a) $\int\frac{1}{x+3}dx$ b) $\int\frac{2}{2-x}dx$ c) $\int\frac{24}{8x-3}dx$ d) $\int\frac{6}{4-2x}dx$

Aufgabe 15

a) $\int_{-2}^{0}\frac{3}{(x-1)^2}dx$ b) $\int_{0}^{2}\frac{4}{(x+2)^3}dx$ c) $\int_{0}^{1}\frac{12}{(4x+1)^2}dx$ d) $\int_{-1}^{0}\frac{12}{(2-3x)^3}dx$

Aufgabe 16

a) $\int_{-2}^{4}\frac{1}{x+3}dx$ b) $\int_{2}^{e+1}\frac{4}{x-1}dx$ c) $\int_{4}^{7}\frac{6}{2x+1}dx$ d) $\int_{e+2}^{e^2+2}\frac{2}{2-x}dx$

4 Integration von einfachen Wurzelfunktionen

4.1 Unbestimmte Integrale: Ohne Summe im Radikanden

(a) Wurzelterme wie $\sqrt{x}$, $x\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ usw., die also nur x im Radikanden haben, lassen sich als Potenz von x schreiben. Man integriert dann Potenzfunktionen, wie in 1.2 gezeigt.

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \boxed{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C} = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

(kommt ganz oft vor)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \boxed{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C} = 2\cdot\sqrt{x} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \boxed{\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C} = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C$$

(b) Steht im Radikand noch ein Zahlenfaktor, dann spaltet man die Wurzel in ein Produkt auf so dass man auf die Form $\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{\text{x}-\text{Potenz}}$ kommt. Dies wurde auf Seite 4 und 7 gezeigt:

$$\int \sqrt{2x}\,dx = \int \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\,dx = \sqrt{2}\cdot\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2}\boxed{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{3}{\sqrt{5x}}dx = \frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \frac{3}{\sqrt{5}}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \boxed{\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C} = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{x} + C = \frac{6}{\sqrt{5}}\sqrt{x} + C$$

Erklärung: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \sqrt{x}^3 = \underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{x}\cdot\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ und $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ und $x^{\frac{4}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^1\cdot x^{\frac{1}{3}} = x\cdot\sqrt[3]{x}$ und $\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 3 von Seite 6:

a) $\int x\sqrt{x}\,dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ c) $\int \sqrt{3x}\,dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}}dx$ e) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}dx$ f) $\int \left(4-2\sqrt{x}\right)^2 dx$

Aufgabe 17

a) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{4}dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x}-2}{x^2}dx$ c) $\int \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$

d) $\int \frac{4x+1-\sqrt{x}}{x}dx$ e) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$ f) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{4x}dx$

4.2 Unbestimmte Integrale: Radikand vom Typ ax+b

Man wendet die Potenzregel an und muss noch durch die innere Ableitung teilen. ***Im Text 48014*** wird gezeigt, wie man diese Integrale auf andere Weise mit Substitution vereinfachen kann.

Die Nummerierung der folgenden Aufgaben entspricht der aus Text 48014:

(14) $\int \sqrt{x+2}\cdot dx = \int (x+2)^{\frac{1}{2}}\cdot dx = \dfrac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x+2}^{\,3} + C$

Zur Probe kann man die Ableitung machen:

$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x+2}^{\,3} + C = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C \quad\Rightarrow\quad F'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+2}$

(15) $\int \sqrt{2x+3}\, dx = \int (2x+3)^{\frac{1}{2}}\, dx = \dfrac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{2x+3}^{\,3} + C$

Zur Probe kann man die Ableitung machen:

$F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{2x+3}^{\,3} + C = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + C \quad\Rightarrow\quad F'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 2 = \sqrt{2x+3}$

Weil in dieser Aufgabe x den Koeffizienten 2 hat, kommt man beim Ableiten unter Berücksichtigung der Kettenregel der Faktor 2 (Ableitung der Klammer) hinzu. (In (17) war dies der Faktor 1, der gar nicht angeschrieben werden musste.) Und daher muss man beim Bilden der Stammfunktion durch diese innere Ableitung teilen, also durch 2.

(16) $\int \sqrt{4x-9}\, dx = \int (4x-9)^{\frac{1}{2}}\, dx = \dfrac{(\boxed{4}x-9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\boxed{4}} + C = \dfrac{\sqrt{4x-9}^{\,3}}{6} + C = \dfrac{1}{6}\sqrt{4x-9}^{\,3} + C$

Der Exponent $\frac{1}{2}$ wird nach der Potenzregel der Integralrechnung um 1 erhöht zu $\frac{3}{2}$.
Durch diese Zahl man muss dann teilen. Außerdem besitzt die Klammer (4x - 9) die (innere) Ableitung 4, durch die man auch teilen muss. Im Nenner steht dann das Produkt $\frac{3}{2}\cdot 4 = 6$, das man kürzen sollte.

(17) $\int \sqrt{4-x}\, dx = \int (4-x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \dfrac{(4-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot(-1)} + C = -\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{4-x}^{\,3} + C$

Hier muss man durch die Ableitung der Klammer teilen und die ist -1. Die Division durch den neuen Exponenten $\frac{3}{2}$ führt zur Multiplikation mit dem Kehrwert $\frac{2}{3}$, was dann zusammen mit dem Minuszeichen im Nenner zu $-\frac{2}{3}$ wird.

(18) $\int \dfrac{12}{\sqrt{2x-3}}dx = 12\int (2x-3)^{-\frac{1}{2}}\, dx = 12\cdot\dfrac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 2} + C = 12\cdot\sqrt{2x-3} + C$

(19) $\int \dfrac{3}{\sqrt{2-x}}dx = 3\int (2-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = 3\cdot\dfrac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot(-1)} + C = -6\cdot\sqrt{2-x} + C$

Hier musste man noch durch die Klammer-Ableitung -1 teilen.

Aufgabe 18

a) $\int \sqrt{5x-10}\, dx$ b) $\int \sqrt{8-4x}\, dx$ c) $\int \dfrac{\sqrt{1-x}}{4}dx$

d) $\int \sqrt{2x-1}^{\,3} dx$ e) $\int \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}dx$ f) $\int \dfrac{6}{\sqrt{3x+6}}dx$

g) $\int \dfrac{4}{\sqrt{9-4x}}dx$ h) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}^{\,3}}$ i) $\int \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$

4.3 Bestimmte Integrale: Ohne Summe im Radikanden (Nummern wie in 48014)

(7) $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x}^3\right]_0^9 = \left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{9}^3 - 0\right] = \frac{2}{3}\cdot 3^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 = 18$

(8) $\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x}^5\right]_1^4 = \frac{2}{5}\cdot\left(\sqrt{4}^5 - \sqrt{1}^5\right) = \frac{2}{5}\cdot\left(2^5 - 1^5\right) = \frac{2}{5}\cdot(32-1) = \frac{2}{5}\cdot 31 = \frac{62}{5}$

Erklärung: $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x}^3 = \underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{=x}\cdot\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ oder so: $x^{\frac{3}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^1\cdot x^{\frac{1}{2}} = x\cdot\sqrt{x}$

$x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}^5 = \underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{=x}\cdot\underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{=x}\cdot\sqrt{x} = x^2\sqrt{x}$ oder so; $\boxed{x^{\frac{5}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^2\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^2\sqrt{x}}$

Lernen: $\boxed{x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}}$ und $\boxed{x^2\sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}}}$

(9) $\int_0^4 \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^4 = \left[\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}}\right]_0^4 = \frac{3}{5}\cdot\left[\sqrt[3]{x}^5\right]_0^4 = \frac{3}{5}\cdot\left[x\sqrt[3]{x^2}\right]_0^4 = \frac{3}{5}\cdot\left(4\cdot\sqrt[3]{16} - 0\right) = \frac{3}{5}\cdot 4\cdot 2\cdot\sqrt[3]{2} = \frac{24}{5}\cdot\sqrt[3]{2}$

Erklärung: $\boxed{\sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{2\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}}$ und $\boxed{x^{\frac{5}{3}} = x^{1+\frac{2}{3}} = x^1\cdot x^{\frac{2}{3}} = x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

$\boxed{\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\cdot 2} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2} = 2\cdot\sqrt[3]{2}}$ und $\boxed{\sqrt[3]{8} = 2,\ \text{denn}\ 2^3 = 8}$.

(10) $\int_1^4 \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 4\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 4\cdot\left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 4\cdot\left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}\right) = 4\cdot(2\cdot 2 - 2\cdot 1) = 4\cdot(4-2) = 8$

Das kann man auch etwas anders aufschreiben, etwa so:

$$\int_1^4 \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 4\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 4\cdot 2\left[\sqrt{x}\right]_1^4 = 8\cdot\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 8\cdot(2-1) = 8$$

Wenn der Radikand einen Faktor enthält, kann man so vorgehen:

(11) $\int_2^8 \sqrt{2x}\,dx = \sqrt{2}\cdot\int_2^8 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2}\cdot\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_2^8 = \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\left(8\cdot\sqrt{8} - 2\cdot\sqrt{2}\right)$

Nun zieht man teilweise die Wurzel: $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, kurz: $\boxed{\sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\left(8\cdot 2\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\underbrace{\left(16\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right)}_{14\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot 14\sqrt{2} = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot 14 = \frac{56}{3}$$

Bei dieser Methode wurde der Zahlenfaktor durch Zerlegen der Wurzel abgespaltet:
$\sqrt{2x} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}$!

Oder eine andere Lösung mit Substitution (siehe Heft 48014) Seite 6.

(12) $\displaystyle\int_{2t}^{8t}\sqrt{\frac{2t}{x}}\,dx=\sqrt{2t}\cdot\int_{2t}^{8t}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{2t}\cdot\int_{2t}^{8t}x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{2t}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{2t}^{8t}=\sqrt{2t}\left[2\sqrt{x}\right]_{2t}^{8t}$

$\displaystyle=2\sqrt{2t}\left[\sqrt{8t}-\sqrt{2t}\right]=2\sqrt{2t}\underbrace{\left(2\sqrt{2t}-\sqrt{2t}\right)}_{=\sqrt{2t}}=2\sqrt{2t}\cdot\sqrt{2t}=2\cdot 2t=4t$

Um das partielle Wurzelziehen kommt man herum, wenn man nach der Integration die abgespaltene Wurzel $\sqrt{2t}$ wieder dazu multipliziert: $\sqrt{2t}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{2t\cdot x}$. Neue 2. Zeile:

$\displaystyle 2\left[\sqrt{2t\cdot x}\right]_{2t}^{8t}=2\left(\sqrt{2t\cdot 8t}-\sqrt{2t\cdot 2t}\right)=2\left(\sqrt{16t^2}-\sqrt{4t^2}\right)=2\cdot(4t-2t)=2\cdot 2t=4t$

(13) $\displaystyle\int_{3}^{12}\sqrt{\frac{x}{3}}\,dx=\int_{3}^{12}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{3}^{12}x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{3}^{12}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\left[x\sqrt{x}\right]_{3}^{12}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(12\sqrt{12}-3\sqrt{3}\right)$

Mit $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$ erhält man: $\displaystyle=\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(24\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)=\frac{2\cdot 21\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=14$

4.4 Bestimmte Integrale: Radikand vom Typ ax+b

(20) $\displaystyle\int_{1}^{5}\sqrt{5-x}\,dx=\int_{1}^{5}(5-x)^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{(5-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot(-1)}\right]_{1}^{5}=\left[-\tfrac{2}{3}\sqrt{5-x}^{\,3}\right]_{1}^{5}=-\tfrac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{0}^{\,3}-\sqrt{4}^{\,3}\right)=-\tfrac{2}{3}\cdot\left(-2^3\right)=\tfrac{16}{3}$

(21) $\displaystyle\int_{-2}^{6}\sqrt{2x+4}\,dx=\int_{-2}^{6}(2x+4)^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{(2x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 2}\right]_{-2}^{6}=\left[\frac{\sqrt{2x+4}^{\,3}}{3}\right]_{-2}^{6}=\frac{\sqrt{16}^{\,3}-0}{3}=\frac{4^3}{3}=\frac{64}{3}$

(22) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{4}{\sqrt{4x+1}}\,dx=4\int_{0}^{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx=4\cdot\left[\frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 4}\right]_{0}^{2}=2\left[\sqrt{4x+1}\right]_{0}^{2}=2\left(\sqrt{9}-\sqrt{1}\right)=2\cdot(3-1)=4$

Aufgabe 19

a) $\displaystyle\int_{1}^{23}\frac{3}{x\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{4-x}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{1}^{9}\frac{2x-\sqrt{x}}{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-2\right)^2\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-6}^{0}\sqrt{4-2x}\,dx$ g) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{8}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

Anleitung: Summanden getrennt integrieren

h) $\displaystyle\int_{-3}^{0}\left(2-\sqrt{1-x}\right)dx$ i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)dx$ j) $\displaystyle\int_{0}^{4t}x\sqrt{\frac{x}{t}}\,dx$

k) $\displaystyle\int_{4}^{10}\sqrt{\frac{x-2}{2}}\,dx$ (Anleitung: Radikand in zwei Brüche zerlegen)

5 Integration von einfachen Exponentialfunktionen

5.1 Unbestimmte Integrale

Man hat ja gelernt, dass beim Integrieren eine Stammfunktion berechnet wird, als eine Funktion deren Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion ist. Daher kann man zu jeder Integration (Aufleiten) eine Probe dadurch machen, dass man wieder ableitet und mit der Ausgangsfunktion vergleicht.

Wenn man weiß, dass $f(x)=e^x$ als Ableitung $f'(x)=e^x$ hat, kann man sofort die Umkehrung als unbestimmtes Integral aufschreiben:

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

Oder: $f(x)=e^{-x} \Rightarrow f'(x)=-e^{-x}$.

bzw. $f(x)=-e^{-x} \Rightarrow f'(x)=+e^{-x}$.

Also gilt: $-e^{-x}+C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} +e^{-x}$ $\boxed{\int e^{-x}dx = -e^{-x}+C}$

Oder: $f(x)=e^{2x} \Rightarrow f'(x)=2e^{2x}$.

bzw. $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2e^{2x}=e^{2x}$.

Also gilt: $\frac{1}{2}e^{2x}+C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} e^{2x}$ $\boxed{\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}+C}$

Analog: $2e^{\frac{1}{2}x}+C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} e^{\frac{1}{2}x}$ $\boxed{\int e^{\frac{1}{2}x}dx = 2e^{\frac{1}{2}x}+C}$

Oder: $\frac{1}{3}e^{3x-4}+C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} e^{3x-4}$ $\boxed{\int e^{3x-4}dx = \frac{1}{3}e^{3x-4}+C}$

Mit einem allgemeinen linearen Exponenten ax + b folgt:

$$f(x)=e^{ax+b} \Rightarrow f'(x)=a\cdot e^{ax+b}$$

Teilt man die Funktion durch die innere Ableitung a des Exponenten, so folgt

$$f(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{a}\cdot a\cdot e^{ax+b}=e^{ax+b}$$

Dazu die Umkehrung, ergibt das nächste Grundintegral:

$$\boxed{\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C}$$

Merksatz:

Beim Integrieren bleibt eine Exponentialfunktion mit einem linearen Exponenten erhalten, es wird lediglich noch durch die innere Ableitung geteilt.

5.2 Bestimmte Integrale

Beispiele.

(1) $\int_{-2}^{2} e^{1-x}dx = \left[\frac{e^{1-x}}{-1}\right]_{-2}^{2} = \left[-e^{1-x}\right]_{-2}^{2} = \left[-e^{-1}\right]-\left[-e^{3}\right] = e^{3}-e^{-1} \approx 19{,}72$

Die innere Ableitung, also die Ableitung von 1-x ist -1. Durch sie wurde geteilt, was dann zum Minuszeichen von e^{1-x} geführt hat.

(2) $\int_{0}^{4} e^{\frac{1}{2}x}dx = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{4} = \left[2e^{\frac{1}{2}x}\right]_{0}^{4} = \left[2e^{2}\right]-\left[2e^{0}\right] = 2e^{2}-2 \approx 12{,}78$

Hier wurde durch die innere Ableitung geteilt, also durch $\frac{1}{2}$, was einer Multiplikation mit 2 gleichkommt.

(3) $\int_{1}^{2} e^{4-2x}dx = \left[\frac{1}{-2}e^{4-2x}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{2}e^{0}+\frac{1}{2}e^{2} = \frac{e^{2}-1}{2} \approx 3{,}19$

(4) $\int_{0}^{\ln 2}\left(4-\frac{1}{2}e^{-x}\right)dx = \left[4x \boxed{+} \frac{1}{2}e^{-x}\right]_{0}^{\ln 2} = 4\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\boxed{e^{-\ln 2}}-0-\frac{1}{2}\boxed{e^{0}}$

Hilfen: Es ist $\boxed{-\ln 2 = \ln\frac{1}{2}}$ und $\boxed{e^{\ln a} = a}$ also folgt $\boxed{e^{-\ln 2} = e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}}$

Außerdem ist $\boxed{e^{0} = 1}$. Wenn man will geht auch noch $\boxed{4\cdot\ln 2 = \ln 2^{4} = \ln 16}$

Das Zwischenergebnis kann man daher so vereinfachen:

$$= \ln 16+\frac{1}{2}\cdot\boxed{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\boxed{1} = \ln 16+\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = \ln 16-\frac{1}{4}$$

(5) $\int_{1}^{2}\frac{4}{e^{2x-4}}dx = 4\int_{1}^{2}e^{-2x+4}dx = \left[4\cdot\frac{e^{-2x+4}}{-2}\right]_{1}^{2} = -2\left[e^{-2x+4}\right]_{1}^{2} = -2\underbrace{\left(e^{0}-e^{2}\right)}_{1-e^{2}} = -2+2e^{2}$

Beim Aufleiten solcher Funktionen bleit der e-Term ja erhalten und man dividiert noch durch die Ableitung des Exponenten. Dieser heißt -2x+4 und seine Ableitung ist -2. Diese steht daher im Nenner. Dann kürzt man 4 und 2 und zieht das Minuszeichen vor den Bruch. Da in -2 ja nicht eingesetzt wird, ist es günstiger (kürzer), wenn man diesen konstanten Faktor -2 vor die eckige Klammer setzt.

(6) $\int_{0}^{2}\left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^{2}-x-\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}}\right]_{0}^{2} = \left[\frac{1}{2}x^{2}-x+2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{0}^{2}$

$$= \left[2-2+2\cdot e^{-1}\right]-\left[2\cdot e^{0}\right] = 2e^{-1}-2 \approx -1{,}2642$$

Aufgabe 20

1) $\int e^{3x}dx$ 2) $\int 4e^{-2x}dx$ 3) $\int 2e^{-\frac{1}{2}x}dx$

4) $\int \frac{e^{x-2}}{2}dx$ 5) $\int e^{4-2x}dx$ 6) $\int \left(4-\frac{1}{2}e^{1-x}\right)dx$

7) $\int (e^x+2)(e^x-2)dx$ 8) $\int \frac{2}{e^x}dx$ 9) $\int \left(3x-2e^{\frac{1}{2}x}\right)dx$

10) $\int \frac{e^x-4}{2e^x}dx$ 11) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx$ 12) $\int (e^x-1)^2\,dx$

Aufgabe 21

13) $\int_2^4 e^{\frac{1}{2}x}dx$ 14) $\int_0^2 e^{1-2x}dx$ 15) $\int_{-2}^1 \frac{2}{e^{2x-1}}dx$

16) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} (2-e^x)dx$ 17) $\int_{-t}^{t} t\cdot e^{t-x}dx$ 18) $\int_0^4 \left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

19) $\int_{\ln 3}^{\ln 9} (e^x-e^{-x})^2\,dx$ (20) $\int_1^2 (e^{2x}-4e^{-x})dx$ 21) $\int_0^2 \frac{1-2e^{-x}}{e^x}dx$

6 Integration von einfachen trigonometrischen Funktionen

6.1 Unbestimmte Integrale

Zunächst muss man sich an folgende Ableitungen erinnern:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \qquad \text{und} \qquad (\cos x)' = -\sin x}$$

Daraus ergeben sich diese beiden Grundintegrale:

$$\boxed{\int \sin x\, dx = -\cos x + C} \text{ und } \boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + C}$$

Besitzt das Argument einen Zahlenfaktor, dann wird der über die innere Ableitung ausgeglichen:

Beim Aufleiten wird durch die innere Ableitung geteilt.

$$\sin(2x) + C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} 2\cdot\cos(2x)$$

$$\tfrac{1}{2}\sin(2x) + C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos(2x) = \cos(2x)$$

$$\boxed{\int \cos(2x)\,dx = \tfrac{1}{2}\sin(2x) + C}$$

$$\cos(2x) + C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} -2\cdot\sin(2x)$$

$$-\tfrac{1}{2}\cos(2x) + C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin(2x) = \sin(2x)$$

$$\boxed{\int \sin(2x)\,dx = \tfrac{1}{2}\cos(2x) + C}$$

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} \tfrac{1}{2}\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$

$$2\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) = \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$

$$\boxed{\int \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)dx = -2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + C}$$

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} -\tfrac{1}{2}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$

$$-2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + C \underset{\text{aufleiten}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) = \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$

$$\boxed{\int \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)dx = -2\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + C}$$

Für viele ist es eine Hilfe, wenn sie die innere Ableitung „sichtbar" in den Nenner schreiben:

$$\int \sin(3x)\,dx = -\frac{\cos(3x)}{3} + C = -\tfrac{1}{3}\cdot\cos(3x) + C$$

$$\int \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot x\right)dx = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}{\frac{\pi}{2}} + C = \tfrac{2}{\pi}\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot x\right) + C$$

Das gilt für alle linearen Argumente (d. h. von der Form ax+b):

$$\int \sin\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)dx = -\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1} + C = -\cos\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + C$$

$$\int \cos(2x+1)\,dx = \frac{\sin(2x+1)}{2} + C = \tfrac{1}{2}\cdot\sin(2x+1) + C$$

$$\int \sin\left(\tfrac{1}{2}x - 2\right)dx = -\frac{\cos\left(\frac{1}{2}x - 2\right)}{\frac{1}{2}} + C = -2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}x - 2\right) + C$$

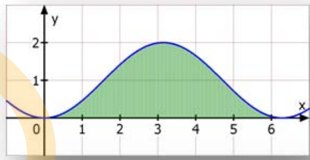
6.2 Bestimmte Integrale

Wie man bestimmte Integrale mittels Substitution vereinfachen kann, wird im Text 40016 gezeigt.

Wichtig:

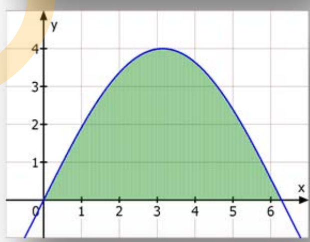
Gradmaß	Bogenmaß	sin x	cos x
$x = 0^o$	$x = 0$	0	1
$x = 30^o$	$x = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$x = 45^o$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$x = 60^o$	$x = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$x = 90^o$	$x = \frac{\pi}{2}$	1	0
$x = 180^o$	$x = \pi$	0	-1

(1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[-\cos(0)\right] = 0 + 1 = 1$



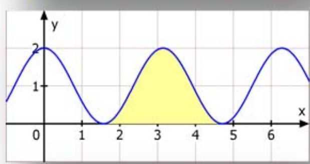
(2) $\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos x)\,dx = [x - \sin x]_0^{2\pi} = [2\pi - \sin(2\pi)] - [0 - \sin(0)] = 2\pi$

denn $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$



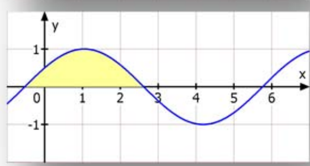
(3) $\int\limits_0^{2\pi} 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right)dx = 4\left[-\frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\pi} = \left[-8\cdot\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{2\pi}$

$= [-8\cdot\cos\pi] - [-8\cdot\cos(0)] = -8\cdot(-1) + 8\cdot 1 = 8 + 8 = 16$



(4) $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} [\cos(2x) + 1]\,dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$

$= \left[\frac{1}{2}\cdot\sin(3\pi) + \frac{3}{2}\pi\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot\sin(\pi) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = \pi$



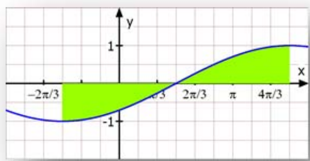
(5) $\int\limits_{-\pi/6}^{5\pi/6} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx = \left[\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1}\right]_{-\pi/6}^{5\pi/6} = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)$

Den Bruchstrich mit dem Nenner 1 kann man weglassen!

Bruchrechnen: $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi - \frac{2}{6}\pi = \frac{3}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{6}\pi = -\frac{3}{6}\pi = -\frac{1}{2}\pi$

Jetzt benötigt man die Tatsache, dass die Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, d. h. es gilt $\sin(-x) = -\sin(x)$, also ist $\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

$= 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$



(6) $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)dx = \left[-\frac{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_{-\pi/2}^{3\pi/2} = -2\cdot\left[\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\pi/2}^{3\pi/2}$

$= -2\cdot\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) - \cos\left(-\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right] = -2\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right] = -2\cdot(0 - 0) = 0$

Hinweis: Die dargestellte Fläche hat natürlich nicht den Inhalt 0. Dieses falsche Ergebnis kommt daher, dass „über die Nullstelle" hinweg integriert worden ist. Richtig: $2\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)dx$

Aufgabe 22

1) $\int \cos(5x)\,dx$ 2) $\int 3\cdot\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$ 3) $\int \frac{\sin(\pi x)}{2}$

4) $\int \cos\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)dx$ 5) $\int \sin(2x-\pi)\,dx$ 6) $\int 4\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\pi\right)dx$

7) $\int \left(x-\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right)dx$ 8) $\int 2\cdot\cos\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx$

1

Aufgabe 23

1) $\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx$ 2) $\int_0^{3\pi/2} \cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$ 3) $\int_{\pi/3}^{4\pi/3} 3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$

4) $\int_{2-\pi/2}^{2} 2\cos(2-x)\,dx$ 5) $\int_0^{3\pi/8} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 6) $\int_0^{2\pi-2} \left(1+\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)dx$

7) $\int_0^{2} \left(x+\sin(1-x)\right)dx$ (8) $\int_{-\pi/4}^{7\pi/4} \left(2-2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$

7 Erstellung von bestimmten Stammfunktionen

a) Welche Stammfunktion zu $f(x)=x^2$ geht durch den Punkt $A(2\,|\,-1)$?

Zunächst berechnet man die allgemeine Stammfunktion: $F(x)=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$

Weil deren Schaubild durch $A(2\,|\,-1)$ gehen soll, müssen wir die Bedingung $F(2)=-1$

umsetzen: $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$

$F(2)=\frac{1}{3}\cdot 8+C$

Bedingung: $F(2)=-1$: $\frac{8}{3}+C=-1$

Also folgt: $C=-1-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}$

<u>Ergebnis:</u> $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{3}$

Probe: $F(2)=\frac{1}{3}\cdot 8-\frac{11}{3}=\frac{8-11}{3}=\frac{3}{3}=1$

b) Welche Stammfunktion zu $f(x)=4x^2-3x+5$ geht durch den Punkt $P(0\,|\,2)$?

Allgemeine Stammfunktion: $F(x)=\int\left(4x^2-3x+5\right)dx=4\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+5x+C$

Bedingung: $F(0)=2$ $F(0)=C$

Also folgt: $C=2$.

<u>Ergebnis:</u> $F(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+2$

c) Bestimme die Stammfunktion zu $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^3}$, deren Schaubild durch $R\left(\sqrt{2}\,|\,1\right)$ geht.

Allgemeine Stammfunktion:

$$F(x)=\int\frac{2x^4+1}{x^3}dx=\int\left(\frac{2x^4}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int\left(2x+x^{-3}\right)dx=2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^{-2}}{-2}+C=x^2-\frac{1}{2x^2}+C$$

Bedingung: $F\left(\sqrt{2}\right)=1$: $F\left(\sqrt{2}\right)=2-\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{7}{4}+C$

Also wird $\dfrac{7}{4}+C=1 \Leftrightarrow C=1-\dfrac{7}{4}=-\dfrac{3}{4}$

<u>Ergebnis:</u> $F(x)=x^2-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{4}$

d) Bestimme die Stammfunktion zu $f(x)=\sqrt{x-2}$, deren Schaubild durch $R\left(6\,|\,\frac{1}{3}\right)$ geht.

Allgemeine Stammfunktion: $F(x)=\int\sqrt{x-2}\,dx=\int(x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx=\dfrac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{x-2}^{\,3}+C$

Bedingung: $F(6)=\frac{1}{3}$: $F(6)=\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{4}^{\,3}+C=\dfrac{2}{3}\cdot 8+C=\dfrac{16}{3}+C$

Daraus folgt: $\frac{16}{3}+C=\frac{1}{3} \Leftrightarrow C=\frac{1}{3}-\frac{16}{3}=-\frac{15}{3}=-5$

<u>Ergebnis:</u> $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x-2}^{\,3}-5$

Aufgabe 24

	Stammfunktion zu	durch
a)	$f(x)=\frac{1}{3}x^4+2x^2-5$	$A(1\mid 2)$
b)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x-12$	$Q(0\mid 2)$
c)	$f(x)=\frac{4}{x^2}$	$P(3\mid 4)$
d)	$f(x)=\frac{5x^2+2x}{x^2}$	$B(1\mid 3)$
e)	$f(x)=\frac{2-x}{4x}$	$C(1\mid 1)$
f)	$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$	$R(3\mid -3)$
g)	$f(x)=x^2-x+\frac{4}{x^2}$	$T(2\mid 12)$
h)	$f(x)=\frac{1}{x+2}$	$U(e-2\mid 3)$

Aufgabe 25

	Stammfunktion zu	durch
a)	$f(x)=\sqrt{2x}$	$A(2\mid 2)$
b)	$f(x)=3\sqrt{x}$	$B(9\mid -4)$
c)	$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$C(16\mid -2)$
d)	$f(x)=\sqrt{5-2x}$	$D(-2\mid 0)$
e)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x}}$	$C(1\mid 1)$
f)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$	$R(3\mid 1)$

Aufgabe 26

	Stammfunktion zu	durch
a)	$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$	$A(2\mid 2)$
b)	$f(x)=e^{2x}$	$B(0\mid -4)$
c)	$f(x)=e^{2-x}$	$C(2\mid -2)$
d)	$f(x)=\frac{3}{e^{2x}}$	$D(-2\mid 0)$
e)	$f(x)=2e^{\frac{1}{2}x+2}$	$C(-2\mid 1)$
f)	$f(x)=\frac{2}{e^{x-1}}$	$R(1+\ln 2\mid 1)$

8 Zusammenstellung aller Übungsaufgaben

Aufgabe 1

a) $\int x^6 dx$ b) $\int 6x^3 dx$ c) $\int \frac{x^2}{2} dx$ d) $\int 3x\, dx$ e) $\int \frac{3}{2} x^5 dx$

Aufgabe 2

a) $\int \frac{1}{x^4} dx$ b) $\int \frac{8}{x^3} dx$ c) $\int \frac{1}{4x^5} dx$ d) $\int \frac{6}{5x^2} dx$ e) $\int \frac{1}{2x} dx$

Aufgabe 3

a) $\int x\sqrt{x}\, dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ c) $\int \sqrt{3x}\, dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}} dx$ e) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}} dx$

Aufgabe 4

a) $\int_1^3 5x^2 dx$ b) $\int_{-3}^3 \frac{1}{3} x^3 dx$ c) $\int_0^1 5x^4 dx$ d) $\int_2^5 \frac{2}{3} x\, dx$ e) $\int_0^2 x^5 dx$

Aufgabe 5

a) $\int_1^4 \frac{5}{x^2} dx$ b) $\int_2^4 \frac{1}{2x^2} dx$ c) $\int_1^4 \frac{1}{(2x)^2} dx$ d) $\int_1^4 \frac{4}{3x^3} dx$ e) $\int_1^2 \frac{5}{x^4} dx$

Aufgabe 6

a) $\int_0^9 \sqrt{x}\, dx$ b) $\int_0^5 \sqrt{5x}\, dx$ c) $\int_2^8 \sqrt{\frac{x}{2}}\, dx$ d) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ e) $\int_3^{12} \frac{1}{\sqrt{3x}} dx$

f) $\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx$ g) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\, dx$ h) $\int_{\frac{1}{2}}^8 \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} dx$ i) $\int_1^9 \frac{3}{x\sqrt{x}} dx$ j) $\int_2^8 \sqrt{\frac{2}{x}}\, dx$

Aufgabe 7

a) $\int_1^4 \frac{5}{x} dx$ b) $\int_2^4 \frac{1}{4x} dx$ c) $\int_1^e \frac{3}{5x} dx$

Aufgabe 8

a) $\int (3x+1)\, dx$ b) $\int (x^2 - 2x - 5)\, dx$

c) $\int \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx$ d) $\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2\right) dx$

e) $\int \left(2x^4 - x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right) dx$ f) $\int \left(-\frac{1}{8}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 7\right) dx$

g) $\int (-x+2)^2\, dx$ h) $\int (x^2 - x + 3)^2\, dx$

i) $\int x(x^2 - 4x + 3)\, dx$ j) $\int (x^2 - 4)(x+1)\, dx$

Aufgabe 9

a) $\int_0^4 (2x-5)\, dx$ b) $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx$ c) $\int_{-3}^3 (x^3 + 2x)\, dx$

d) $\int_{-1}^2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx$ e) $\int_{-4}^4 \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx$ f) $\int_0^1 (x^2 - 4)^2\, dx$

g) $\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 dx$ h) $\int_2^3 (3x-6)^2\, dx$

Aufgabe 10

a) $\int \frac{x^2+2}{x^2}dx$ b) $\int \frac{x^4-4x^2+6}{x^2}dx$ c) $\int \frac{x^2-1}{4x^2}dx$

d) $\int \frac{\left(x^2-3\right)^2}{x^2}dx$ e) $\int \frac{5x^4-8}{2x^2}dx$ f) $\int \frac{5x+2}{6x}dx$

g) $\int \frac{x^2+4}{2x}dx$ h) $\int \frac{x^2-4x+2}{x^2}dx$ i) $\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{2t}dt$

j) $\int \frac{x^4+x^3-2x+1}{4x^2}dx$ k) $\int \frac{2x^4-3x^2+4}{x^3}dx$ l) $\int \frac{x^3-2x^2+6x-1}{3x^2}dx$

Aufgabe 11

a) $\int_1^2 \frac{x^2-16}{2x^2}dx$ b) $\int_2^4 \frac{x^4-8}{2x^2}dx$ c) $\int_1^2 \frac{8x^4+2x^2-1}{4x^2}dx$

d) $\int_{-3}^{-1} \frac{\left(x^2-1\right)}{x^2}dx$ e) $\int_1^2 \frac{3x^4-2x^2-8}{16x^2}dx$ f) $\int_1^2 \frac{x^2-3}{x^4}dx$

Aufgabe 12

a) $\int_1^2 \frac{x^2+9}{x}dx$ b) $\int_{-4}^{-2} \frac{x^2-2}{4x}dx$ c) $\int_1^4 \frac{x^2+2x+5}{x^2}dx$

d) $\int_1^2 \frac{x^3-x^2+x-1}{2x^2}dx$ e) $\int_2^4 \frac{\left(x^2-2\right)^2}{2x}dx$ f) $\int_{-1}^2 \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

Aufgabe 13

a) $\int \frac{1}{(2-x)^2}dx$ b) $\int \frac{20}{(x+6)^3}dx$ c) $\int \frac{24}{(8x-3)^2}dx$ d) $\int \frac{24}{(8x-3)^4}dx$

Aufgabe 14

a) $\int \frac{1}{x+3}dx$ b) $\int \frac{2}{2-x}dx$ c) $\int \frac{24}{8x-3}dx$ d) $\int \frac{6}{4-2x}dx$

Aufgabe 15

a) $\int_{-2}^0 \frac{3}{(x-1)^2}dx$ b) $\int_0^2 \frac{4}{(x+2)^3}dx$ c) $\int_0^1 \frac{12}{(4x+1)^2}dx$ d) $\int_{-1}^0 \frac{12}{(2-3x)^3}dx$

Aufgabe 16

a) $\int_{-2}^4 \frac{1}{x+3}dx$ b) $\int_2^{e+1} \frac{4}{x-1}dx$ c) $\int_4^7 \frac{6}{2x+1}dx$ e) $\int_{e+2}^{e^2+2} \frac{2}{2-x}dx$

Aufgabe 17

a) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{4}dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x}-2}{x^2}dx$ c) $\int \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$

d) $\int \frac{4x+1-\sqrt{x}}{x}dx$ e) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$ f) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{4x}dx$

Aufgabe 18

a) $\int \sqrt{5x-10}\ dx$ b) $\int \sqrt{8-4x}\ dx$ c) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{4}dx$

d) $\int \sqrt{2x-1}^3 dx$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{2+x}}dx$ f) $\int \frac{6}{\sqrt{3x+6}}dx$

g) $\int \frac{4}{\sqrt{9-4x}}dx$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}^3}$ i) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$

Aufgabe 19

a) $\int_1^{23} \frac{3}{x\sqrt{x}}dx$ b) $\int_1^4 \frac{4-x}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int_1^9 \frac{2x-\sqrt{x}}{x}dx$

e) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}-2\right)^2 dx$ f) $\int_{-6}^0 \sqrt{4-2x}dx$ g) $\int_0^2 \frac{8}{\sqrt{4x+1}}dx$

Anleitung: Summanden getrennt integrieren

h) $\int_{-3}^0 \left(2-\sqrt{1-x}\right)dx$ i) $\int_{-1}^1 \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)dx$ j) $\int_0^{4t} x\sqrt{\frac{x}{t}}dx$

k) $\int_4^{10} \sqrt{\frac{x-2}{2}}dx$ (Anleitung: Radikand in zwei Brüche zerlegen)

Aufgabe 20

1) $\int e^{3x}dx$ 2) $\int 4e^{-2x}dx$ 3) $\int 2e^{-\frac{1}{2}x}dx$

4) $\int \frac{e^{3x}}{2}dx$ 5) $\int e^{4-2x}dx$ 6) $\int \left(4-\frac{1}{2}e^{1-x}\right)dx$

7) $\int \left(e^x+2\right)\left(e^x-2\right)dx$ 8) $\int \frac{2}{e^x}dx$ 9) $\int \left(3x-2e^{\frac{1}{2}x}\right)dx$

10) $\int \frac{e^x-4}{2e^x}dx$ 11) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx$ 12) $\int \left(e^x-1\right)^2 dx$

Aufgabe 21

13) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{2}x}dx$ 14) $\int\limits_0^2 e^{1-2x}dx$ 15) $\int\limits_{-2}^1 \frac{2}{e^{2x-1}}dx$

16) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \left(2-e^x\right)dx$ 17) $\int\limits_{-t}^{t} t\cdot e^{t-x}dx$ 18) $\int\limits_0^4 \left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

19) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 9} \left(e^x-e^{-x}\right)^2 dx$ (20) $\int\limits_1^2 \left(e^{2x}-4e^{-x}\right)dx$ 21) $\int\limits_0^2 \frac{1-2e^{-x}}{e^x}dx$

Aufgabe 22

1) $\int \cos(5x)dx$ 2) $\int 3\cdot\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$ 3) $\int \frac{\sin(\pi x)}{2}$

4) $\int \cos\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)dx$ 5) $\int \sin(2x-\pi)dx$ 6) $\int 4\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\pi\right)dx$

7) $\int \left(x-\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right)dx$ 8) $\int 2\cdot\cos\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx$

Aufgabe 23

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(2x)dx$ 2) $\int\limits_0^{3\pi/2} \cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$ 3) $\int\limits_{\pi/3}^{4\pi/3} 3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$

4) $\int\limits_{2-\pi/2}^{2} 2\cos(2-x)dx$ 5) $\int\limits_0^{3\pi/8} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 6) $\int\limits_0^{2\pi-2} \left(1+\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)dx$

7) $\int\limits_0^2 \left(x+\sin(1-x)\right)dx$ (8) $\int\limits_{-\pi/4}^{7\pi/4} \left(2-2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$

Aufgabe 24

	Stammfunktion zu	durch
a)	$f(x)=\frac{1}{3}x^4+2x^2-5$	$A(1\mid 2)$
b)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x-12$	$Q(0\mid 2)$
c)	$f(x)=\frac{4}{x^2}$	$P(3\mid 4)$
d)	$f(x)=\frac{5x^2+2x}{x^2}$	$B(1\mid 3)$
e)	$f(x)=\frac{2-x}{4x}$	$C(1\mid 1)$
f)	$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$	$R(3\mid -3)$
g)	$f(x)=x^2-x+\frac{4}{x^2}$	$T(2\mid 12)$
h)	$f(x)=\frac{1}{x+2}$	$U(e-2\mid 3)$

Aufgabe 25

	Stammfunktion zu	durch
a)	$f(x)=\sqrt{2x}$	$A(2\mid 2)$
b)	$f(x)=3\sqrt{x}$	$B(9\mid -4)$
c)	$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$C(16\mid -2)$
d)	$f(x)=\sqrt{5-2x}$	$D(-2\mid 0)$
e)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x}}$	$C(1\mid 1)$
f)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$	$R(3\mid 1)$

Aufgabe 26

	Stammfunktion zu	durch
a)	$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$	$A(2\mid 2)$
b)	$f(x)=e^{2x}$	$B(0\mid -4)$
c)	$f(x)=e^{2-x}$	$C(2\mid -2)$
d)	$f(x)=\frac{3}{e^{2x}}$	$D(-2\mid 0)$
e)	$f(x)=2e^{\frac{1}{2}x+2}$	$C(-2\mid 1)$
f)	$f(x)=\frac{2}{e^{x-1}}$	$R(1+\ln 2\mid 1)$

Nur auf der Mathe-CD:

Lösungen