ANALYSIS

Arkus-Funktionen

Übersicht

Die wichtigsten Eigenschaften

Ausführliche Besprechung in 47301

Datei Nummer 47305

Stand: 5. Nov. 2017

FRIEDRICH W. BUCKEL

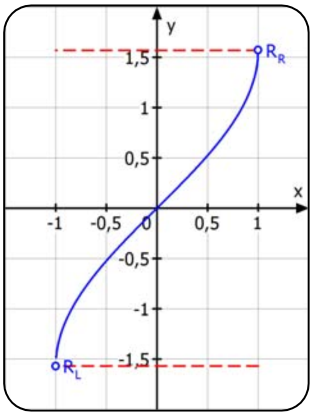
INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Wichtigste Fakten:

f(x) =	arcsin(x)	arccos(x)	arctan(x)	arccot(x)
Definitionsbereich	$[-1;1]$	$[-1;1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertebereich	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$	$]0;\pi[$
Ableitung	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-1}{1+x^2}$
Monotonie	steigend	fallend	steigend	fallend
Symmetrie	PSy. zu O $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$	PSy zu $Q\left(0 \mid \frac{\pi}{2}\right)$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$	PSy. zu O $\arctan(-x) = -\arctan(x)$	PSy zu $Q\left(0 \mid \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$
Nullstellen:	0	1	0	keine
Asymptoten	keine	keine	$y = \pm\frac{\pi}{2}$	$y = 0$ und $y = \pi$
Stammfunktion	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$	$x \cdot \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

Die Funktion Arkussinus: $f(x) = \arcsin(x)$



Definitionsbereich $\mathbf{D} = [-1;1]$

Wertebereich: $W = \left[-\frac{1}{2}\pi ; \frac{1}{2}\pi\right]$

Wichtige Werte:

$\arcsin(0) = 0$ $\quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

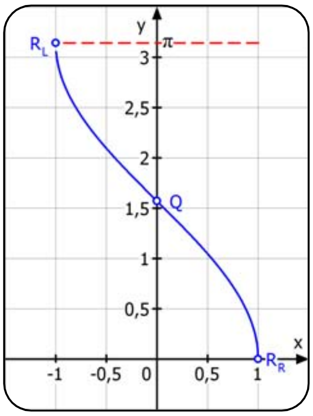
Punktsymmetrie zum Ursprung: $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

Ableitung: $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

arcsin(x) als Stammfunktion: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$

Stammfunktion von arcsin(x): $\int \arcsin(x)dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

Die Funktion Arkuskosinus: $f(x) = \arccos(x)$:



Definitionsbereich $\mathbf{D} = [-1;1]$

Wertebereich: $W = [\,0\,;\pi]$

Wichtige Werte:

$\arccos(1) = 0$ $\quad \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\quad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

Die Kurve $y = \arccos(x)$ ist punktsymmetrisch zu $Q\left(0 \mid \frac{1}{2}\pi\right)$.

Daraus folgt: $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

Also:

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

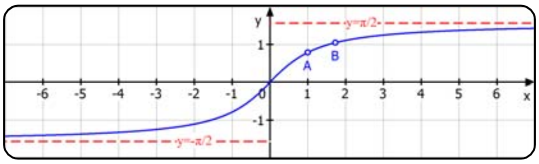
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Ableitung: $\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

arccos(x) als Stammfunktion: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos(x) + C$

Stammfunktion von arccos(x): $\int \arccos(x)dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$

Die Funktion Arkustangens: $f(x) = \arctan(x)$:



Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W = \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$

Wichtige Werte: $\arctan(0) = 0$, $\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

Die Kurve $y = \arctan(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, also gilt:

$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

Also hat der Graph die waagrechten Asymptoten $y = \frac{\pi}{2}$ (für $x \to \infty$) und $y = -\frac{\pi}{2}$ (für $x \to -\infty$)

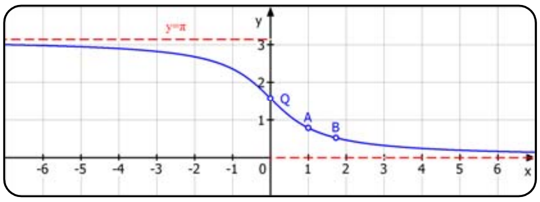
Ableitung: $\arctan(x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

arctan(x) als Stammfunktion $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + C$

Stammfunktion von arctan(x): $\displaystyle\int \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) + C$

Die Funktion Arkuskotangens: $f(x) = \text{arccot}(x)$:

f ist die Umkehrfunktion von $g(x) = \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.



Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W =]\,0 ; \pi\,[$

Wichtige Werte: $\text{arccot}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6}\pi$, $\text{arccot}(1) = \frac{1}{4}\pi$, $\text{arccot}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\pi$, $\text{arccot}(0) = \frac{1}{2}\pi$

Die Kurve $y = \arctan(x)$ ist punktsymmetrisch zu $Q\left(0 \mid \frac{\pi}{2}\right)$.

Daraus folgt: $\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot}(x)$

z. B.: $\text{arccot}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$, $\text{arccot}(-1) = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$, $\text{arccot}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} \text{arccot}(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arccot}(x) = \pi$

Also hat der Graph die waagrechten Asymptoten $y = 0$ (für $x \to \infty$) und $y = \pi$ (für $x \to -\infty$)

Ableitung: $\text{arc}\cot(x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

arccot(x) als Stammfunktion $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = -\text{arccot}(x) + C$

Stammfunktion von arcot(x): $\displaystyle\int \text{arccot}(x)dx = x \cdot \text{arccot}(x) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) + C$

Einige Umrechnungsformeln:

$$\arcsin(x) = \arccos\sqrt{1-x^2} \qquad \text{für } 0 \le x \le 1$$

$$\arccos(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} \qquad \text{für } 0 \le x \le 1$$

$$\arcsin(x) = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

$$\arccos(x) = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \text{für } 0 < x \le 1$$

$$\arctan(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(x) = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{für } x \ge 0$$

$$\operatorname{arccot}(x) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arccot}(x) = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{für } -1 \le x \le 1$$

$$\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{für } -1 \le x \le 1$$