Logistisches Wachstum

Themenheft

für die Oberstufe

Anwendungsaufgaben von e-Funktionen

Hier gibt es viel Theoretisches für Lehrer und Studenten, aber auch sehr ausführliche Beispiele, die dann in der Aufgabensammlung 45831 stehen.

Auf deutlich einfacherem Niveau ist die Einführung „Schulstunde Wachstum 5“ (Text 45832)

Datei Nr. 45830

Stand: 16. April 2023

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

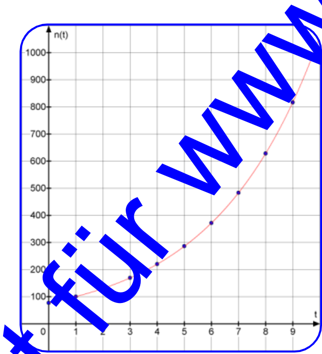
Vorwort

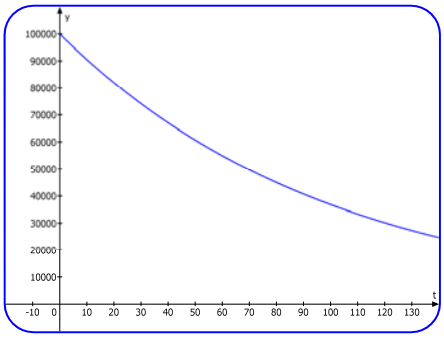
Größen wie Anzahlen, Mengen, Temperatur usw. können sich zeitabhängig verändern, d. h. zunehmen oder abnehmen oder nacheinander beides tun. Das nennt man dann „Wachstum“, wobei man in der Mathematik eine Abnahme auch als Wachstum bezeichnet.

Die Mathematiker versuchen dann, ein Wachstum zahlenmäßig festzuhalten, indem sie es in Tabellen übertragen. Darin steht dann, welchen Wert die „Bestandsfunktion“ zu einem bestimmten Zeitpunkt hat. Wenn diese Zuordnung eindeutig ist, wird versucht, einen Funktionsterm zu finden, so dass man auch Werte vorausberechnen kann. Das geschieht dann oft mit einem Verfahren, das man ***Regression*** nennt. Eine solche Wachstumsfunktion ist immer ein Näherungsverfahren, das in einem bestimmten Zeitintervall gilt, denn die Vorgänge, die ein Wachstum steuern, sind oft sehr komplex, sodass man zufrieden ist, wenn man abschnittsweise eine gute Näherung hat.

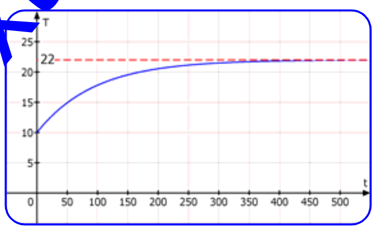
Je nach mathematischem Modell unterscheidet man verschiedene Wachstumsarten. Wenn die Änderung in gleichen Zeitabschnitten dieselbe ist, spricht man von linearem Wachstum.
Meistens aber nimmt auch das Wachstum zu oder ab, und dann untersucht man das exponentielle bzw. prozentuale Wachstum (Zunahme oder Abnahme), oder das begrenzte Wachstum.
Beim Pflanzenwachstum verwendet man das logistische Wachstum.

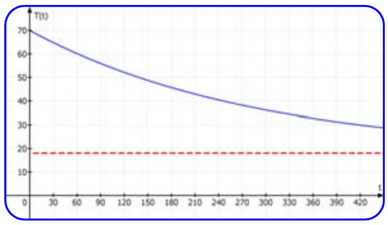
Schaubilder der **exponentiellen Zunahme (gegen Unendlich) und Abnahme (gegen Null).**



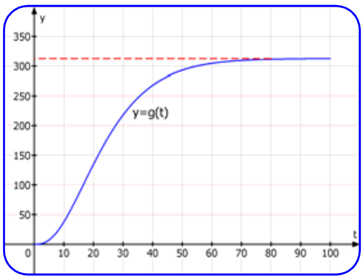


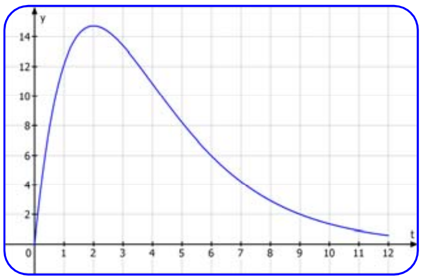
Schaubilder des **begrenzten Wachstums** gegen einen oberen bzw. unteren Grenzwert (ungleich Null).





Logistisches Wachstum links und **vergiftetes Wachstum** (rechts)





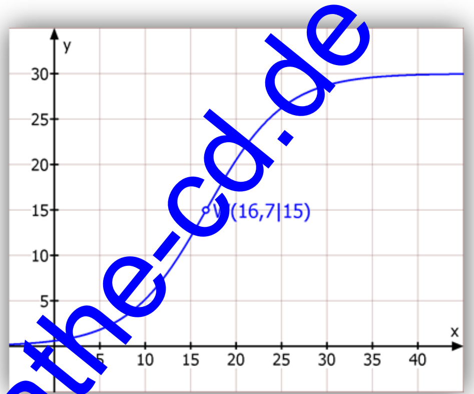
Der Begriff vergiftetes Wachstum ist nicht fest als Funktionstyp definiert sondern ist mehr ein Sammelname für Wachstumsarten, die ein so geartetes Schaubild haben. Daher gibt es auch keine Standardmethoden für alle, und die Aufgaben unterscheiden sic h oft deutlich.

1 Beispielaufgabe zum Einstieg

(1) **Das Wachstum einer Fichte beginnt exponentiell, verlangsamt sich dann und geht in ein gebremstes Wachstum über. Das ist grob gesagt, das Merkmal des sogenannten logistischen Wachstums.**

Die Höhengleichung (Wachstumsgleichung) einer Fichte wird durch die Funktion h angegeben:

$h(t) = \dfrac{0,6}{0,02 + e^{-0,234 \cdot t}}$. (h in m, t in Jahren)



Mit einem geeigneten Rechner oder Mathegrafix kann man sich das Schaubild genauer ansehen:

(2) **Analyse des Wachstumsverlaufs:**

Zum Zeitpunkt des Beginns der Beobachtung (t=0) hat die Fichte die Höhe $h(0) = \dfrac{0,6}{0,02 + e^0} = \dfrac{0,6}{1,02} \approx 0,59\ (m)$

Nach etwa 40 Jahren (abgelesen am Schaubild) hat sie ihre Maximalgröße etwa erreicht:

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{0,6}{0,02 + \lim\limits_{t \to \infty} e^{-0,234 \cdot t}} = \frac{0,6}{0,02 + 0} = 30\ \ (m).$$

Das Schaubild hat also die **waagrechte Asymptote** $y = 30$ (für $t \to \infty$).

Es gibt eine zweite waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $t \to -\infty$, denn $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{0,6}{0,02 + \underbrace{e^{-0,234 \cdot t}}_{\to \infty}} = 0$,

die allerdings für diese Wachstumsanwendung ohne Bedeutung ist.

(3) **Berechnung von zwei Ableitungen.** Dazu verwendet man einen günstigen Funktionsterm:

$$h(t) = \frac{0,6}{0,02 + e^{-0,234 \cdot t}} = 0,6 \cdot \left(0,02 + e^{-0,234 \cdot t}\right)^{-1}$$

$$h'(t) = (-1) \cdot 0,6 \cdot \left(0,02 + e^{-0,234 \cdot t}\right)^{-2} \cdot e^{-0,234 \cdot t} \cdot (-0,2324):$$

Die Kettenregel kam zweimal zur Anwendung: $\left(0,02 + e^{-0,234 \cdot t}\right)^{-1}$ verlangt die innere Ableitung, also die Ableitung von $e^{-0,234 \cdot t}$. Und für diese Ableitung benötigt man die Kettenregel erneut: $\left(e^{-0,234 \cdot t}\right)' = e^{-0,234 \cdot t} \cdot (-0,234)$.

Zusammenfassen und dabei den konstanten Faktor vor den Bruch schreiben:

$h'(t) = 0,1404 \dfrac{e^{-0,234 \cdot t}}{\left(0,02 + e^{-0,234 \cdot t}\right)^2}$ Dies ist zugleich die **Wachstumsgeschwindigkeit.**

Die **Quotientenregel** liefert nun schlimme Brüche: $h'(t) = \dfrac{u' \cdot v + v' \cdot u}{v^2}$

$$h''(t) = 0,1404 \cdot \frac{e^{-0,234 \cdot t}(-0,234) \cdot \left(0,02 + e^{-0,234 \cdot t}\right)^2 - 2 \cdot \left(0,02 + e^{-0,234 \cdot t}\right) \cdot e^{-0,234 \cdot t}(-0,234) \cdot e^{-0,234 \cdot t}}{\left(0,02 + e^{-0,234 \cdot t}\right)^4}$$

Im Zähler kann man $\left(0,02 + e^{-0,234 \cdot t}\right)$ ausklammern und dann wegkürzen:

$$h''(t) = 0{,}1404 \cdot \frac{\cancel{\left(0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}\right)}\left[e^{-0{,}234 \cdot t}(-0{,}234) \cdot \left(0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}\right) - 2 \cdot e^{-0{,}234 \cdot t}(-0{,}234) \cdot e^{-0{,}234 \cdot t}\right]}{\left(0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$h''(t) = 0{,}1404 \cdot \frac{e^{-0{,}234 \cdot t}(-0{,}234) \cdot \left(0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}\right) - 2 \cdot e^{-0{,}234 \cdot t}(-0{,}234) \cdot e^{-0{,}234 \cdot t}}{\left(0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}\right)^3}$$ stehen lassen!

(4) **Bestimmung des Wendepunkts:** Man setzt den Zähler 0 und vereinfacht dann:

$$e^{-0{,}234 \cdot t}(-0{,}234) \cdot \left(0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}\right) - 2 \cdot e^{-0{,}234 \cdot t}(-0{,}234) \cdot e^{-0{,}234 \cdot t} = 0 \qquad |: -0{,}234 \cdot e^{-0{,}234 \cdot t}$$

$$\left(0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}\right) - 2 \cdot e^{-0{,}234 \cdot t} = 0$$

$$0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t} - 2 \cdot e^{-0{,}234 \cdot t} = 0$$

$$0{,}02 - e^{-0{,}234 \cdot t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-0{,}234 \cdot t} = 0{,}02 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}234 \cdot t = \ln 0{,}02$$

$$t = \frac{\ln 0{,}02}{-0{,}234} \approx 16{,}7$$

Dazu gehört die Höhe $h(16{,}7) = 15 \ (m)$ Dies kann man durch Einsetzen berechnen.

Die Kurve hat also den Wendepunkt $W(16{,}7 \mid 15)$.

Der Wendepunkt hat eine ganz entscheidende Bedeutung im Wachstum des Baumes.
Vor Erreichen des Wendepunkts hat das Schaubild Linkskrümmung, dort nimmt die Steigung zu. Das bedeutet für den Baum, dass im Zeitintervall $[0\,;16{,}7]$ die Wachstumsgeschwindigkeit wächst. Mit anderen Worten in gleich großen Zeitspannen, etwa pro Jahr, wächst der Baum immer schneller, nimmt seine Höhe um immer größere Beträge zu.

Mit Erreichen des Wendepunkts ändert sich das: Die Kurve hat nun Rechtskrümmung, die Steigung, also die Wachstumsgeschwindigkeit, geht zurück. Jetzt nimmt die Höhe pro Jahr um immer weniger zu. Das Wachstum verlangsamt sich und geht asymptotisch gegen 0. Real gesehen wird der Baum irgendwann wirklich aufhören zu wachsen, was nicht zum mathematischen Modell passt, denn eine Asymptote erreicht man ja gar nie!
Der Wendepunkt markiert also die **Trendwende** im Wachstum.

Damit ist auch klar, dass die **größte Wachstumsgeschwindigkeit** (gemäß diesem mathematischen Modell) genau im Wendepunkt, also zum Zeitpunkt t = 16,7 (Jahre) vorliegt. (Hier ignoriert das Modell die Tatsache, dass es Jahreszeiten gibt und somit der Baum während des Jahres unterschiedlich stark wächst.)

$$v_{max} = h'(16{,}7) = 0{,}1404 \frac{e^{-0{,}234 \cdot 16{,}7}}{\left(0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot 16{,}7}\right)^2} \approx 1{,}75 \quad \left(\frac{m}{Jahr}\right)$$

Hinweis: Wer mit einem **CAS** arbeiten darf, hat die Ableitungen natürlich sofort parat.
Das muss ich hier nicht unbedingt zeigen.

(5) **Wann hat der Baum z. B. 90% seiner Maximalgröße erreicht?**

90% der Maximalhöhe 30 (m) sind 90% von $30 = 0{,}90 \cdot 30 = 27$ (m)

Bedingung: $h(t) = 27 \Leftrightarrow \frac{0{,}6}{0{,}02 + e^{-0.234 \cdot t}} = 27$

$$\frac{0{,}6}{27} = 0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t} \Leftrightarrow e^{-0{,}234 \cdot t} = 0{,}0022$$

$$-0{,}234 \cdot t = \ln 0{,}0022 \Leftrightarrow t_{90\%} = \frac{\ln 0{,}0022}{-0{,}234} = 26{,}1 \text{ (Jahre)}$$

Ob das Ergebnis mit der Wirklichkeit übereinstimmt, müsste man statistisch überprüfen.

(6) **Behauptung**: **Das Wachstum ist in der Anfangsphase annähernd exponentiell.**

Dazu bestimmt man eine Näherungskurve für $t \to -\infty$ (nicht für $x \to 0$!), was mit Hilfe einer trickreichen Überlegung geht (die man sich für diesen Fall merken sollte).

Weil für $t \to -\infty$ gilt $e^{-0{,}234t} \to \infty$, wird der Nenner der Funktion $h(t) = \frac{0{,}6}{0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}}$ für $t \to -\infty$ schnell sehr groß, so dass man den Summanden 0,02 im Nenner für diesen Prozess vernachlässigen kann.

Für $t \to -\infty$ ist also $h(t) = \frac{0{,}6}{0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}} \approx \frac{0{,}6}{e^{-0{,}234 \cdot t}} = 0{,}6 \cdot e^{0{,}234 \cdot t} = h_a(t)$,

d.h. $h_a(t) = 0{,}6 \cdot e^{0{,}234 \cdot t}$ ist Näherungsfunktion für kleine Werte von t.

Ergebnis: Für kleine Werte von h(t) liegt näherungsweise exponentielles Wachstum vor.

(7) **Umwandlung des Funktionsterms in eine andere Form:**

$h(t) = \frac{0{,}6}{0{,}02 + e^{-0{,}234 \cdot t}}$ ist dieselbe Funktion wie $h(t) = 30 \cdot \left(1 - \frac{50}{e^{0{,}234 \cdot t} + 50}\right)$.

(Wir werden später sehen, wie dies allgemein aussieht.)

Erweitern mit $e^{0{,}234 \cdot t}$: $h(t) = \frac{0{,}6 \cdot e^{0{,}234 \cdot t}}{0{,}02 \cdot e^{0{,}234 \cdot t} + e^{-0{,}234 \cdot t} \cdot e^{0{,}234 \cdot t}} = \frac{0{,}6 \cdot e^{0{,}234 \cdot t}}{0{,}02 \cdot e^{0{,}234 \cdot t} + 1}$

Durch 0,02 kürzen: $h(t) = \frac{\frac{0{,}6}{0{,}02} \cdot e^{0{,}234 \cdot t}}{e^{0{,}234 \cdot t} + \frac{1}{0{,}02}} = \frac{30 \cdot e^{0{,}234 \cdot t}}{e^{0{,}234 \cdot t} + 50} = 30 \cdot \frac{e^{0{,}234 \cdot t}}{e^{0{,}234 \cdot t} + 50}$

(Ziel: im Zähler und Nenner steht derselbe e-Term mit dem Koeffizienten 1).
Im Zähler wird dann die Nullsumme $50 - 50$ dazu addiert. Dann kann man den Bruch so in zwei Brüche zerlegen, dass der 1. Bruch den Wert 1 hat:

$$h(t) = 30 \cdot \frac{e^{0{,}234 \cdot t} + 50 - 50}{e^{0{,}234 \cdot t} + 50} = 30 \cdot \underbrace{\frac{e^{0{,}234 \cdot t} + 50}{e^{0{,}234 \cdot t} + 50}}_{=1} - 30 \cdot \frac{50}{e^{0{,}234 \cdot t} + 50}$$

Jetzt noch 30 ausklammern: $h(t) = 30\left(1 - \frac{50}{e^{0{,}234 \cdot t} + 50}\right)$

Hier nochmals die **Term-Umformungsschritte**:

1. Mit dem inversen e-Term erweitern.
2. So kürzen, dass der e-Term im Nenner den Koeffizienten 1 hat.
3. Den konstanten Faktor im Zähler vor den Bruch ziehen.
4. Geeignete Nullsumme im Zähler addieren, so dass man in zwei Brüche zerlegen kann, von denen der erste den Wert 1 hat.
5. Dann noch den gemeinsamen konstanten Faktor ausklammern.

(8) **Behauptung: In der Endphase liegt näherungsweise begrenztes Wachstum vor.**

Dazu bestimmt man eine Näherungskurve für $t \to \infty$ und zwar mit folgender trickreicher Überlegung (die man sich für diesen Fall merken sollte).

Wir benötigen den soeben umgeformten Funktionsterm:

$$h(t) = 30\left(1 - \frac{50}{e^{0{,}234\cdot t} + 50}\right)$$

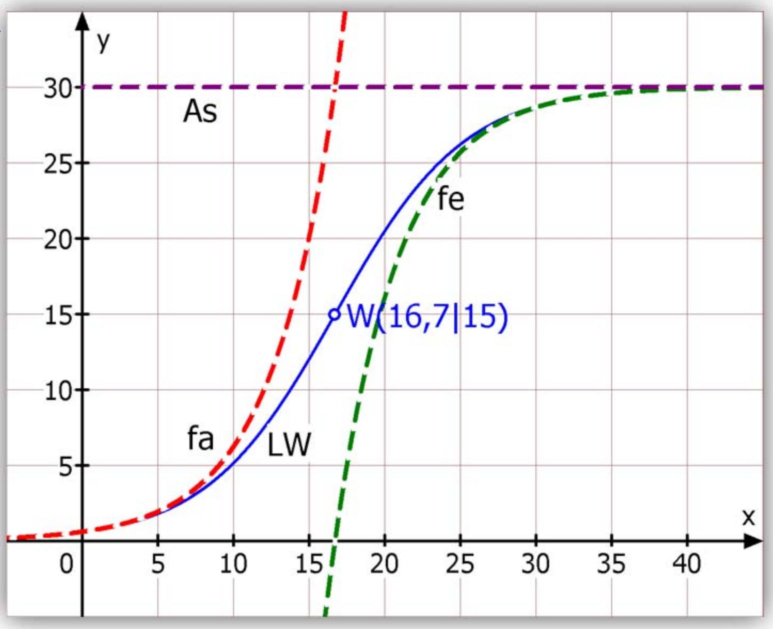
Bei diesem Term steht im Nenner $e^{+0{,}234\cdot t}$, was für $t \to \infty$ gegen Unendlich geht. Daher kann man „daneben" den Summanden 50 vernachlässigen.

Man bekommt so die „End-Näherungsfunktion" $h_e(t) = 30 \cdot \left(1 - \frac{50}{e^{0{,}234\cdot t}}\right)$

bzw. $h_e(t) = 30\left(1 - 50 \cdot e^{-0{,}234\cdot t}\right)$.

Wer es sich gemerkt hat, erkennt jetzt, dass dies die Wachstumsfunktion eines begrenzten Wachstums ist.

LW = Logistisches Wachstum
As = Asymptote
fa = Näherungsfunktion/Anfang
fe = Näherungsfunktion/Endphase
W = Wendepunkt



(9) Woran erkennt man (mathematisch), ob ein logistisches Wachstum vorliegt?

Es geht jetzt hier um eine sinnvolle Definition dieses Wachstumsmodells.
Dazu muss man beachten, dass der Baum am Anfang näherungsweise exponentiell wächst, und dass er dann allmählich ins begrenzte Wachstum übergeht.
Hier geht man vor, wie es Physiker machen, wenn sie eine Gesetzmäßigkeit erforschen:
Man macht aus zwei Proportionalitäten eine gemeinsame Proportionalität:

Für das exponentielle Wachstum gilt: $R(t) = B'(t) = c \cdot B(t)$

Für das begrenzte Wachstum gilt: $R(t) = B'(t) = c \cdot [S - B(t)]$

Dis sind zwei Proportionalitäten:
Zwei Größen heißen proportional, wenn ihr Quotient für alle Werte konstant ist.

Für das exponentielle Wachstum gilt: $\frac{R(t)}{B(t)} = c$, d.h. $R(t) \sim B(t)$

und für das begrenzte Wachstum: $\frac{R(t)}{S - B(t)} = c$ d. h. $R(t) \sim (S - B(t))$

Proportional stellt man sich am besten so vor:

Verdoppelt sich die eine Größe, dann verdoppelt sich auch die andere.
Wenn sich beim exponentiellen Wachstum der Bestand B(t) verdoppelt hat, dann gilt dasselbe für die Wachstumsrate (Wachstumsgeschwindigkeit).
Beim begrenzten Wachstum kann man so überlegen: Wenn sich der Abstand zum Grenzwert (genannt Sättigungsmanko) halbiert hat, dann auch die Wachstumsrate.

Nun soll für das logistische Wachstum beides gelten. Also kam Pierre-Francois Verhulst (1804-1849, Belgien) auf die Idee, beide Größen zu multiplizieren $R(t) \sim B(t) \cdot (S - B(t))$

was nichts anderes heißt, als dass der Quotient $\frac{R(t)}{B(t) \cdot [S - B(t)]} = c$ konstant ist.

So kommt man auf die Gleichung $R(t) = c \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$

bzw. $B'(t) = c \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$ (*)

Und dies ist jetzt die **Definition** für das mathematische Modell „**logistisches Wachstum**“:
Ein Bestand wächst logistisch, wenn die **Differenzialgleichung** $B'(t) = c \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$ gilt.

Hinweis:

Das ist dem physikalischen Vorgehen nur ähnlich:
Wenn eine Größe P in der Physik proportional zu A und proportional zu B ist, dann
heißt dies folgendes: $P \sim A$ *wenn B konstant bleibt*, also $P = k \cdot A$
und $P \sim B$ *wenn A konstant bleibt*, also $P = r \cdot B$
Bleiben A und B nicht konstant, dann gilt: $P \sim A \cdot B$, also $P = s \cdot A \cdot B$.
Das schräg Gedruckte trifft beim logistischen Wachstum jedoch nicht zu.

(10) Nun zur Praxis – So könnte eine Aufgabe heißen:

Zeige, dass die Funktion h logistisches Wachstum beschreibt,

mit $h(t)=\dfrac{0,6}{0,02+e^{-0,234\cdot t}}$ und der Differenzialgleichung $h'(t)=c\cdot h(t)\cdot\left[S-h(t)\right]$.

Beweis:

Dazu benötigt man die oben schon berechnete Ableitung: $h'(t)=0,1404\dfrac{e^{-0,234\cdot t}}{\left(0,02+e^{-0,234\cdot t}\right)^2}$

Einsetzen in die DGL, dabei ist S der Grenzwert 30.

$$0,1404\frac{e^{-0,234\cdot t}}{\left(0,02+e^{-0,234\cdot t}\right)^2}=c\cdot\frac{0,6}{0,02+e^{-0,234\cdot t}}\cdot\left[30-\frac{0,6}{0,02+e^{-0,234\cdot t}}\right] \quad \Big| \cdot\left(0,02+e^{-0,234\cdot t}\right)^2$$

$$0,1404\cdot e^{-0,234\cdot t}=c\cdot 0,6\cdot\left(0,02+e^{-0,234\cdot t}\right)\left[30-\frac{0,6}{0,02+e^{-0,234\cdot t}}\right]$$

$$0,1404\cdot e^{-0,234\cdot t}=c\cdot 0,6\cdot 30\cdot\left(0,02+e^{-0,234\cdot t}\right)-c\cdot 0,6^2$$

$$0,1404\cdot e^{-0,234\cdot t}=\cancel{c\cdot 0,36}+c\cdot 18\cdot e^{-0,234\cdot t}-\cancel{c\cdot 0,36} \quad \Big| :e^{-0,234\cdot t}$$

$$0,1404=c\cdot 18 \quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{0,1404}{18}\approx 0,0078$$

Ergebnis: Die Funktion $h(t)=\dfrac{0,6}{0,02+e^{-0,234\cdot t}}$ löst die DGl $h'(t)=0,0078\cdot h(t)\cdot\left[30-h(t)\right]$.

Also liegt logistisches Wachstum vor.

2 Übungen zu den Grundaufgaben

Aufgabe 1: **Berechne zu den Funktionen in Aufgabe 2 den Startwert (zu t = 0) und den Grenzwert für $t \to \infty$.**

Aufgabe 2 **Berechne den Wendepunkt**

a) $f(t) = \dfrac{80}{1 + 79 \cdot e^{-0,3 \cdot t}}$

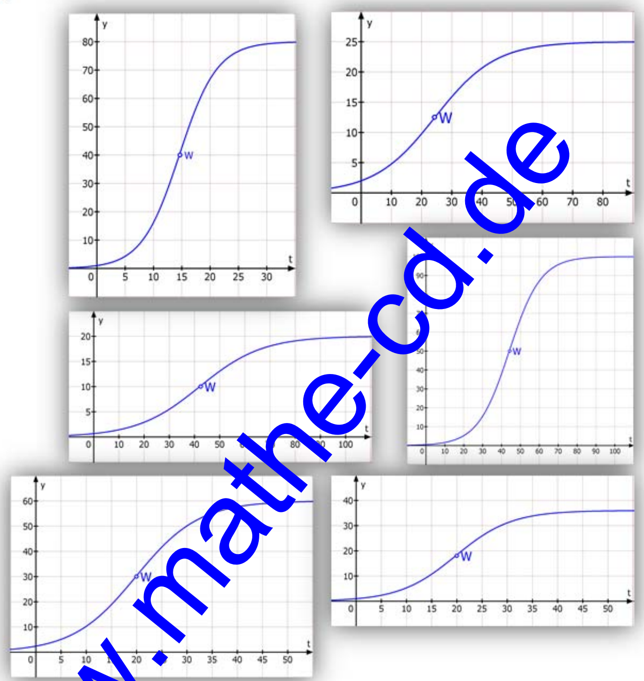
b) $g(t) = \dfrac{50}{2 + 23 \cdot e^{-0,1 \cdot t}}$

c) $h(t) = \dfrac{20}{1 + 29 \cdot e^{-0,08 \cdot t}}$

d) $m(t) = \dfrac{10}{0,1 + 19,9 \cdot e^{-0,12 \cdot t}}$

e) $L(t) = \dfrac{60 \cdot e^{0,16 \cdot t}}{e^{0,16 \cdot t} + 24}$

f) $z(t) = 36 - \dfrac{1260}{e^{0,18 \cdot t} + 35}$



Aufgabe 3: **Zeige, dass man die Funktionen aus Aufgabe 2 auch durch die folgenden Terme darstellen kann:**

a) $f(t) = \dfrac{80 \cdot e^{0,3 \cdot t}}{e^{0,3 \cdot t} + 79}$ und $f(t) = 80\left(1 - \dfrac{79}{e^{0,3 \cdot t} + 79}\right)$

b) $g(t) = 25 \cdot \left(1 - \dfrac{23}{2 \cdot e^{0,1 \cdot t} + 23}\right)$

c) $h(t) = 20 \cdot \left(1 - \dfrac{29}{e^{0,08 \cdot t} + 29}\right)$

d) $m(t) = 100\left(1 - \dfrac{199}{e^{0,12 \cdot t} + 199}\right)$

e) $L(t) = 60\left(1 - \dfrac{24}{e^{0,16 \cdot t} + 24}\right)$

f) $z(t) = 36\left(1 - \dfrac{35}{e^{0,18 \cdot t} + 35}\right)$ und $z(t) = \dfrac{36}{1 + 35 \cdot e^{-0,18 \cdot t}}$

Aufgabe 4: **Bestimme zu den Funktionen aus Aufgabe 2 die Näherungsfunktionen für das exponentielle Anfangswachstum und das gebremste Endwachstum.**

Die Aufgaben dieses Textes und auch die meisten Beispiele findet man auch in der Aufgabensammlung 45831.

3 Rekursive Berechnung einer Wachstumsfolge

Verwendet man Messpunkte in gleichen Abständen, dann arbeitet man mit einer **Zahlenfolge**.

Beispiel: Später im Text geht es in einem Beispiel um das Wachstum einer **Schimmelpilzkultur**, die eine bestimmte Fläche bedecken kann, die das Wachstum am Ende begrenzt, so dass man als Modell das logistische Wachstum heranziehen kann.

Beginnt man zu einem bestimmten Zeitpunkt, den wir t = 0 nennen, dann gehört dazu eine anfänglich vom Pilz bedeckte Fläche: $A(0) = 12$ (cm^2). Die maximal erfassbare Fläche hat S = 80 cm^2

Man misst nun in bestimmten Zeitabständen Δt immer wieder die vom Pilz bedeckte Fläche und findet heraus, dass nach 1 Tag die Schimmelfläche um 10% zugenommen hat:

$A(1) = 12 \cdot 1{,}1 = 13{,}2$

Der Zuwachs ΔA folgt ganz bestimmten Regeln. Schreibt man ihn allgemein als $A(t+\Delta t) - A(t)$ auf, dann erkennt man, dass dies zur so genannten Differenzengleichung von Folgen führt, wie sie beim linearen exponentiellem und begrenztem Wachstum schon ausführlich beschrieben worden ist.

Zur Erinnerung:

Beim **linearen Wachstum** gilt: $A(t+\Delta t) - A(t) = c$ (konstant): ***Arithmetische Folge***.

Beim **exponentiellen Wachstum** gilt:

$$\frac{A(t+\Delta t)}{A(t)} = q \quad \Leftrightarrow \quad A(t+\Delta t) = (1+p) \cdot A(t) \quad \Leftrightarrow \quad A(t+\Delta t) = A(t) + p \cdot A(t)$$

Also ist $A(t+\Delta t) - A(t) = p \cdot A(t)$ ***Geometrische Folge***.

Beim **begrenzten Wachstum** (Zunahme) gilt:

$B(t+1) = S - d(t+1) = S - q \cdot d(t)$ und mit $d(t) = S - B(t)$ folgt dann

$B(t+1) = S - q \cdot [S - B(t)]$ Hiervon subtrahiert man B(t):

$B(t+1) - B(t) = S - q \cdot [S - B(t)] - B(t)$

Umformung der rechten Seite:

$$= S - q \cdot S + q \cdot B(t) - B(t) = S\underbrace{(1-q)}_{=p} + B(t)\underbrace{(q-1)}_{=-p} = S \cdot p - B(t) \cdot p = (S - B(t)) \cdot p$$

Daraus folgt sofort die gesuchte Differenzengleichung: $\boxed{B(t+1) - B(t) = p \cdot [S - B(t)]}$

Dies ergibt dann eine ***begrenzt wachsende Folge***.

Nun untersuchen wir das logistische Wachstum, und zwar anhand unseres Schimmelbefalls.

Herleitung der Differenzengleichung:

Auf Seite 8 wurde die Differenzialgleichung für ein logistisches Wachstum aufgestellt:

$$A'(t) = c \cdot A(t) \cdot [S - A(t)] \qquad (1)$$

Formt man so um: $\frac{A'(t)}{A(t)} = c \cdot [S - A(t)]$

dann kann man für t = 0 rechnen: $\frac{A'(0)}{A(0)} = c \cdot [S - A(0)] \qquad (1')$

Wir kennen $A(0) = 12$ und $S = 80$: $A(1) = 13{,}2$. Der Anstieg in der 1 Stunde wird also durch

diese Wachstumsrate beschrieben: $R(0) = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(1) - A(0)}{1} = \frac{13{,}2 - 12}{1} = 1{,}2$.

Wir verwenden daher näherungsweise $A'(0) = R(0)$.

Dies alles setzen wir in (1') ein und erhalten:

$$\frac{A'(0)}{A(0)} = c \cdot [80 - 12] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1{,}2}{12 \cdot 68} = c \quad \Leftrightarrow \quad c = 0{,}00145$$

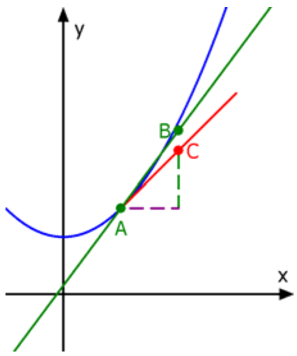
Günstiger ist es, einen Bruch zu verwenden:

$$\frac{1{,}2}{12 \cdot 68} = c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{12}{120 \cdot 68} = \frac{1}{680}$$

Dies führt zur Differenzialgleichung: $A'(t) = \frac{1}{680} \cdot A(t) \cdot [80 - A(t)] \qquad (2)$

Für eine Näherungsrechnung ersetzen wir die Tangentensteigung $A'(t)$ durch die Sekantensteigung:

$$R(t) = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t+1) - A(t)}{1} = A(t+1) - A(t)$$



Damit wird aus 2 diese Rekursionsformel:

$$A(t+1) - A(t) = \frac{1}{680} \cdot A(t) \cdot [80 - A(t)]$$

Und nach Umformung: $A(t+1) = A(t) + \frac{1}{680} \cdot A(t) \cdot [80 - A(t)]$

Die Abbildung zeigt, dass die Sekantensteigung bei Linkskrümmung größer als die Tangentensteigung ist. Daher werden wir bei folgender Näherungsrechnung eher etwas zu kleine Werte erhalten:

Rekursive Berechnung:

Aus $A(0) = 12$ und $A(1) = 13{,}2$ errechnen wir daher:

$$A(3) = A(2) + \frac{1}{680} \cdot A(2) \cdot [80 - A(2)] = 13{,}2 + \frac{13{,}2}{680} \cdot (80 - 13{,}2) \approx 14{,}5$$

Und daraus: $A(4) = A(3) + \frac{}{680} \cdot A(3) \cdot [80 - A(3)] = 14{,}5 + \frac{14{,}5}{680} \cdot (80 - 14{,}6) \approx 16{,}3$

Und: $A(5) = A(4) + \frac{1}{680} \cdot A(4) \cdot [80 - A(4)] = 16{,}3 + \frac{16{,}3}{680} \cdot (80 - 16{,}3) \approx 17{,}8$

4 Lösung der Differenzialgleichung überprüfen.

Auf Seite 8 wurde die Differenzialgleichung des logistischen Wachstums aufgestellt.´

$$A'(t) = c \cdot A(t) \cdot [S - A(t)]$$

Mit schulischen Mitteln kann man ihr in der Regel nur mit einem Lösungsansatz zu Leibe rücken.

Etwa damit: $A(t) = \frac{k}{1 + a \cdot e^{-bt}}$ (1)

Zum Ableiten schreibt man $A(t) = k \cdot (1 + a \cdot e^{-bt})^{-1}$

Jetzt ableiten: $A'(t) = -k \cdot (1 + ae^{-bt})^{-2} \cdot ae^{-bt} \cdot (-b)$

$$A'(t) = abk \frac{e^{-bt}}{(1 + ae^{-bt})^2}$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung, getrennt nach beiden Seiten:

Linke Seite: $\frac{abk \cdot e^{-bt}}{(1 + ae^{-bt})^2}$

Rechte Seite: $c \cdot \frac{k}{1 + a \cdot e^{-bt}} \cdot \left[S - \frac{k}{1 + a \cdot e^{-bt}} \right] = \frac{ckS}{1 + a \cdot e^{-bt}} - \frac{ck^2}{(1 + a \cdot e^{-bt})^2}$

$$= \frac{ckS \cdot (1 + a \cdot e^{-bt})}{(1 + a \cdot e^{-bt})^2} - \frac{ck^2}{(1 + a \cdot e^{-bt})^2} = \frac{ckS + ckSa \cdot e^{-bt} - ck^2}{(1 + a \cdot e^{-bt})^2}$$

Nun beide Seiten vergleichen: $\frac{abk \cdot e^{-bt}}{(1 + ae^{-bt})^2} = \frac{ckS + ckSa \cdot e^{-bt} - ck^2}{(1 + a \cdot e^{-bt})^2}$

Zähler vergleichen: $abke^{-bt} = ckS + ckSa \cdot e^{-bt} - ck^2 \quad | :k$

$$abe^{-bt} = cS + cSa \cdot e^{-bt} - ck$$

Weil der Funktionsterm links kein Absolutglied hat, muss dies auch für die rechts Seite gelten,

also wird $cS - ck = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = S}$.

Dann bleibt noch: $abe^{-bt} = cSa \cdot e^{-bt} \quad | : ae^{-bt}$

Koeffizientenvergleich $\boxed{b = cS}$

Einsetzen in (1): $A(t) = \frac{S}{1 + a \cdot e^{-c \cdot S \cdot t}}$

Kennt man die Randbedingung $A(0)$, kann man damit a berechnen:

$$A(0) = \frac{S}{1 + a} \Leftrightarrow 1 + a = \frac{S}{A(0)} \Leftrightarrow a = \frac{S}{A(0)} - 1$$

Uns somit könnte man die Lösungsfunktion der DGL allgemein so angeben:

$$A(t) = \frac{S}{1 + \left(\frac{S}{A(0)} - 1 \right) \cdot e^{-cS \cdot t}} \quad (1)$$

Beispiel 1

Für welchen Wert von c ist die Funktion $g(t)=\dfrac{50}{2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}}$ Lösung der DGL $y'=c\cdot y(25-y)$?

Lösung:

Zuerst den Funktionsterm für die Ableitung günstiger darstellen: $g(t)=50\cdot\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^{-1}$

Ableitung: $g'(t)=-50\cdot\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^{-2}\cdot 23\cdot e^{-0,1\cdot t}\cdot(-0,1)=\dfrac{115\cdot e^{-0,1\cdot t}}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}$

In die Differenzialgleichung einsetzen:

$$\frac{115\cdot e^{-0,1\cdot t}}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}=c\cdot\frac{50}{2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}}\cdot\left[25-\frac{50}{2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}}\right]$$

Rechte Seite umformen:

$$=\frac{c\cdot 50\cdot 25}{2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}}-\frac{c\cdot 50\cdot 50}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}=\frac{c\cdot 50\cdot 25\cdot\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}-\frac{c\cdot 50\cdot 50}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}$$

$$\frac{c\cdot 50\cdot 25\cdot 2+c\cdot 50\cdot 25\cdot 23\cdot e^{-0,1\cdot t}}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}-\frac{c\cdot 50\cdot 50}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}$$

Da beide Brüche denselben Nenner besitzen, kann man die Zähler subtrahieren:

$$=\frac{\cancel{c\cdot 50\cdot 25\cdot 2}+c\cdot 50\cdot 25\cdot 23\cdot e^{-0,1\cdot t}-\cancel{c\cdot 50\cdot 50}}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}=\frac{c\cdot 50\cdot 25\cdot 23\cdot e^{-0,1\cdot t}}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}$$

Jetzt linke und rechte Seite vergleichen:

$$\frac{115\cdot e^{-0,1\cdot t}}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}=\frac{c\cdot 50\cdot 25\cdot 23\cdot e^{-0,1\cdot t}}{\left(2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}$$

Zähler vergleichen: $115\cdot e^{-0,1\cdot t}=c\cdot 50\cdot 25\cdot 23\cdot e^{-0,1\cdot t}\quad |:e^{-0,1\cdot t}$

$$115=c\cdot 50\cdot 25\cdot 23\quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{\overset{=5\cdot 23}{115}}{50\cdot 25\cdot 23}=\frac{1}{250}=0,004$$

Ergebnis; $g(t)=\dfrac{50}{2+23\cdot e^{-0,1\cdot t}}$ ist Lösung der Differenzialgleichung $y'=0,004\cdot y(25-y)$

bzw. $g'(t)=\dfrac{1}{250}\cdot g(t)\cdot(25-g(t))$

Übrigens: So kann man zu einer Gleichung des logistischen Wachstums eine Differenzialgleichung erstellen.

Beispiel 2

Zeige, dass $L(t) = 60\left(1 - \frac{24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}\right) = 60 - \frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}$ eine logistische Wachstumsfunktion ist.

Lösung:

Die Differenzialgleichung einer logistischen Wachstumsfunktion hat die Form $y' = c\cdot y\cdot(S - y)$

S ist der Grenzwert der Funktion: $S = \lim\limits_{t\to\infty} 60\left(1 - \frac{24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}\right) = 60\cdot(1-0) = 60$

Für die Ableitung umschreiben: $L(t) = 60 - 24\cdot 60\cdot\left(e^{0{,}16\cdot t} + 24\right)^{-1}$

Ableitung: $L'(t) = 60\cdot 24\cdot\left(e^{0{,}16\cdot t} + 24\right)^{-2}\cdot e^{0{,}16\cdot t}\cdot 0{,}16 = \frac{60\cdot 24\cdot 0{,}16\cdot e^{0{,}16\cdot t}}{\left(e^{0{,}16\cdot t} + 24\right)^2}$

Rechte Seite der DGL:

$$c\cdot\left(60 - \frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}\right)\cdot\left[\underbrace{60 - \left(60 - \frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}\right)}\right]$$

$$= c\cdot\left(60 - \frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}\right)\cdot\frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}$$

$$= c\cdot\left(\frac{60\cdot\left(e^{0{,}16\cdot t} + 24\right)}{e^{0{,}16\cdot t} + 24} - \frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}\right)\cdot\frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}$$

$$= c\cdot\left(\underbrace{\frac{60\cdot e^{0{,}16\cdot t} + \cancel{60\cdot 24}}{e^{0{,}16\cdot t} + 24} - \frac{\cancel{60\cdot 24}}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}}\right)\cdot\frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}$$

$$= c\cdot\left(\frac{60\cdot e^{0{,}16\cdot t}}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}\right)\cdot\frac{60\cdot 24}{e^{0{,}16\cdot t} + 24}$$

$$= c\,\frac{60^2\cdot 24\cdot e^{0{,}16\cdot t}}{\left(e^{0{,}16\cdot t} + 24\right)^2}$$

Jetzt linke und rechte Seite vergleichen:

$$\frac{60\cdot 24\cdot 0{,}16\cdot e^{0{,}16\cdot t}}{\left(e^{0{,}16\cdot t} + 24\right)^2} = c\,\frac{60^2\cdot 24\cdot e^{0{,}16\cdot t}}{\left(e^{0{,}16\cdot t} + 24\right)^2}$$

Zähler vergleichen: $60\cdot 24\cdot 0{,}16\cdot e^{0{,}16\cdot t} = c\cdot 60^2\cdot 24\cdot e^{0{,}16\cdot t} \quad |:60\cdot 24\cdot e^{0{,}16\cdot t}$

$$0{,}16 = c\cdot 60 \quad\Leftrightarrow\quad c = \frac{0{,}16}{60} = \frac{16}{6000} = \frac{1}{375}$$

Ergebnis: Für $c = \frac{1}{375}$ erfüllt L die Differenzialgleichung des logistischen Wachstums.
Also beschreibt die Funktion L ein solches Wachstum.