Wachstum - Zentraltext

Didaktische Übersicht über das Thema Wachstum

Klassifizierung verschiedener Modelle

Übersicht über die Texte:

„Wo finde ich was?“

Datei Nr. 45800

Stand: 30.12.20

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist im Grunde nur eine Art Bericht darüber, was Mathematiker tun, wenn sie Wachstums-Vorgänge beschreiben und auswerten sollen. Sie erstellen je nach Art des Wachstums ein mathematisches Modell, das möglichst gut die Situation beschreiben soll.
Dann muss man herausfinden, wie man mit diesem Modell arbeiten kann, also welche Berechnungsmöglichkeiten man hat, Voraussagungen für das Wachstum zu berechnen, wie man die Änderungen des Wachstums berechnen kann: Zunahme / Abnahme des Wachstums usw.

Ich will auf den folgenden 5 Seiten kurz berichten, was ich dazu in den vielen Texten meiner Mathe-CD zusammengestellt habe. Mit Übersicht gelingt es besser, Ordnung in diese Vielfalt zu bringen.

Eine Liste der Texte zum Wachstum
findet man auf der letzten Seite.

1. Man braucht ein mathematisches Modell für die unregelmäßige Natur

Eine der großen Aufgaben der Mathematik ist es, Veränderungen zahlenmäßig zu erfassen, durch Formel das zu beschreiben, was war, und vorherzusagen, was sein wird. Wenn ein Bäumchen wächst, kann man die Höhe in bestimmten Zeitabständen messen und dann eine Tabelle anlegen. Dann versucht man ein mathematisches Modell zu finden, dessen Formeln dieses Wachstum so gut wie möglich beschreibt. Dazu muss man immer idealisieren und von Unregelmäßigkeiten absehen. So wird man bei vielen Pflanzen in der Frühphase des Wachstum das exponentielle Wachstumsmodell verwenden können, weil man feststellt, dass die Höhe der Pflanze in gleichen Zeitabschnitten um den gleichen Prozentsatz (d. h. Faktor q) zunimmt. Dabei muss man „übersehen", dass dieses Wachstum von Hitze, Trockenheit, Kälte usw. gesteuert wird und im Grunde alles andere als regelmäßig stattfindet. Dennoch wird eine Funktion der Form $h(t) = a \cdot q^t$ bei großzügigem Hinsehen viele Bedürfnisse erfüllen.

Diese Exponentialfunktion ist stetig, d.h. sie liefert zu jedem Zeitpunkt einen Wert, und dabei macht sie keine Sprünge. Unser Messverfahren nimmt dagegen nur in bestimmten Zeitabständen Werte auf, so dass eine Folge von Zahlen entsteht, eine Zahlenfolge, die ganz anderes behandelt werden muss wie das allzu theoretische stetige Wachstum, das es eigentlich in dieser idealisierten Form gar nicht gibt.

2. Wachstum durch Zahlenfolgen beschreiben

Man wird also vor allem sprunghaftes Wachstum untersuchen und durch Zahlenfolgen beschreiben. Will man die Art der Folge bestimmen, d.h. die Art, in der ihre Werte zunehmen, dann interessiert vor allem die Differenz aufeinander folgender Werte, also so genannte **Differenzengleichungen**.
Ein fast ideales und sogar stetiges Wachstum ist das gleichmäßige Füllen eines Wasserbeckens. Wenn man hier alle 10 Minuten das Volumen oder der Wasserstand festhält, dann erhält man zwar kein sprunghaftes Wachstum, aber eine Zahlenfolge wie bei einem sprunghaften Wachstum.
Wenn man beispielsweise die gemessenen Volumenwerte durch die Folge $V(t)$ beschreibt, t irgendeine Zeiteinheit, dann weiß man (auch ohne Nachmessen), dass in gleichen Zeitspannen immer dieselbe Wassermenge zufließt: $V(t+1) - V(t)$ ist also immer gleich groß, für jeden Wert von t.
Die Differenzengleichung für das **lineare Wachstum** heißt also $V(t+1) - V(t) = d$ (ein konstanter Betrag). Dies führt zu so genannten **arithmetischen Folgen**.

3. Zur Berechnung der Glieder einer Zahlenfolge gibt es prinzipiell zwei Verfahren:

a) **Die rekursive Methode:** Die Differenzengleichung sagt uns nämlich, wie man den Nachfolger aus dem Vorgänger berechnet: $V(t+1) = V(t) + d$. Wenn man dann noch den Anfangswert $V(0)$ kennt, dann kann man loslegen und schrittweise ein Glied nach dem anderen berechnen.

b) **Die explizite Methode:** Man kann einen Funktionsterm herleiten, der es gestattet, die Werte zu beliebigem t direkt zu berechnen, ohne dass man zuvor den Vorgänger kennen muss.
Diese Funktion heißt hier (weil es eine algebraische Folge ist) $V(t) = V(0) + (t-1) \cdot d$

4. Prozentuales oder exponentielles Wachstum

Zurück zu unserem wachsenden Bäumchen. Wenn man feststellt, dass bei ihm die Höhe in gleichen Zeitspannen um den gleichen Prozentsatz zunimmt, dann kommt man auf folgende Differenzen-gleichung: $h(t+1) = h(t) + p \cdot h(t)$, wobei p der Prozentsatz ist, also etwa 5% = 0,05.

Die Differenzengleichung lautet also: $h(t+1) - h(t) = p \cdot h(t)$. Damit können wir **rekursiv** berechnen.

Für eine **explizite** Berechnungsfunktion geht man so vor:

Aus $h(t+1) = h(t) + p \cdot h(t)$ wird $h(t+1) = (1+p) \cdot h(t)$ bzw. $h(t+1) = q \cdot h(t)$.

Und jetzt kann man, wie in Text 18810 gezeigt wird, die Funktion $h(t) = h(0) \cdot q^t$ finden, und darum nennt man **prozentuales Wachstum auch exponentielles Wachstum**.

5. Die Natur bremst alles aus – das begrenzte Wachstum

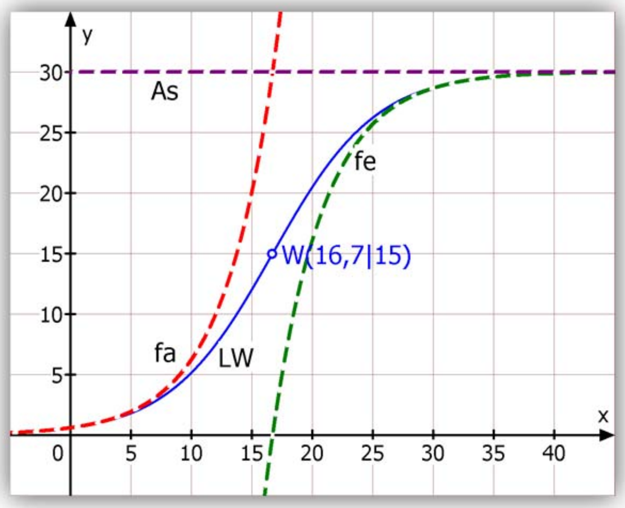
Schaut man sich die Endphase allen Wachstums an, dann geht dort in der Regel das Wachstum zurück, man sagt, die Wachstumsrate geht zurück, oft auf Null, das Wachstum ist dann praktisch zum Stillstand gekommen. Das gibt es auch bei physikalischen Prozessen. Wenn eine Tasse heißen Kaffees mit 60°C auf dem Tisch steht, und man vergisst sie während des Lesens dieses spannenden Textes, dann findet man sie später nahezu auf Zimmertemperatur abgekühlt. Dieser Vorgang des Abkühlens ist eine Abnahme, ein negatives Wachstum. Und auch hier geht die Abkühlungsrate, also die Abkühlung pro Minute gegen 0. Wenn man im Physikunterricht einen Kondensator auflädt und einerseits zeigt, wie seine Ladung zunimmt und zugleich der Ladestrom gegen 0 geht, dann hat man auch hier zwei Prozesse, die (in diesem Falle) relativ schnell zu Ende kommen. Nach kurzer Zeit ist die Maximalladung erreicht, und dabei geht dann der Ladestrom auf 0 zurück.

Für solche Fälle hat man ein mathematisches Modell entwickelt, das man begrenztes Wachstum nennt, und das sich auf folgende Vorgaben bezieht:
Ein solches Wachstum besitzt einen oberen Grenzwert (bei begrenzter Abnahme liegt ein unterer Grenzwert vor). Der Abstand der wachsenden (bzw. abnehmenden) Größe von diesem Grenzwert S muss prozentual abnehmen, also in gleichen Zeitspannen um den gleichen Prozentsatz.

Wenn die wachsende Größe durch die Funktion B dargestellt wird, dann muss also sie Differenzfolge $d(n) = S - f(n)$ prozentual abnehmen: $d(n+1) = d(n) \cdot q$ wobei wegen der Abnahme q eine Zahl zwischen 0 und 1 ist, genauer q = 1 – p (p in %). **Im Text 45820** wird daraus die Differenzengleichung $B(t+1) - B(t) = p \cdot [S - B(t)]$ hergeleitet, aus der man dann eine rekursive Berechnung erstellen kann. Eine explizite Formel kann man mit dem Ansatz $B(t) = a \cdot b^t + c$ finden, wobei c der Grenzwert S ist. Mit zwei Wertepaaren bestimmt man a und b.

6. Der Natur näher kommen mit dem logistischen Wachstum

Erinnern Sie sich noch an unser kleines Bäumchen. Anfangs scheint es exponentiell in die Höhe zu starten, aber schon bald verlangsamt sich das Wachstum. Die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt immer weniger zu, bis sie an der sogenannten Trendwende beginnt, kleiner zu werden. Und dann geht das Wachstum allmählich in das begrenzte Wachstum über.



Auch ohne dass man die zugehörige Abbildung zeigt, ahnt man schon, dass die Wachstumskurve jetzt S-förmig wird. Diese Abbildung zeigt das Wachstum einer Fichte, die ab 70 cm Größe beobachtet wird und eine Höhe von 30 m erreicht.
f_a stellt die anfängliche Näherungsfunktion dar (exponentielles Wachstum), f_e die Näherungsfunktion des beschränkten Endwachstums. Die blaue Kurve gehört zum mathematischen Modell des logistischen Wachstums, das näherungsweise dieses Baumwachstum beschreibt.

Dies wird im **Text 45830** ausführlich dargelegt und beschrieben.

7. Man braucht mehr höhere Mathematik für solches Wachstum.

Wie bereits erwähnt, benötigt man sowohl **Wachstumsfolgen**, die nur Bestandswerte zu bestimmten Zeitpunkten angeben (und keine Werte an den Zeitpunkten dazwischen), aber auch stetige **Wachstumsfunktionen**, mit denen man beliebige Zwischenwerte berechnen kann.

Für Schüler etwas verwirrend ist die Tatsache, dass Folgen auch zu den Funktionen gehören.
Sie haben aber Definitionsbereiche, die z. B. so aussehen $\mathbb{D} = \{0;1;2;...\}$, weil es eben nur die Werte B(0), B(1), B(2) usw. gibt, aber nicht B(1,3). Eine Funktion mit der expliziten Berechnungsformel $B(t) = 280 \cdot 0{,}09^t$ stellt also eine Funktion dar, deren Wertmenge man eine Folge nennt, wenn sie $\mathbb{D} = \{0;1;2;...\}$ als Definitionsbereich hat. Ist der Definitionsbereich dagegen $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$, dann liegt eine stetige Funktion vor, die auch Zwischenwerte, etwa B(2,54) liefert.
Man muss aber immer bedenken, dass diese Exponentialfunktion ein mathematisches Modell ist, das einen Realablauf beschreiben soll. In wieweit da Zwischenwerte sinnvoll sind, muss man einschätzen. Folgen entstehen aber auch bei stetigem Wachstum, wenn man die Messwerte nur zu ganzzahligen t-Werten aufnimmt. Etwas verwirrend …

Die Untersuchung einer Wachstumsfolge beinhaltet oftmals die Aufgabe, dass man Werte rekursiv berechnen soll. Dann muss man herausfinden, von welcher Art die Folge ist. Mit anderen Worten wie entsteht das Nachfolgerglied aus dem Vorgängerglied:

$B(t+1) = B(t) + d$ gilt für ein lineares Wachstum,

$B(t+1) = B(t) \cdot q$ gilt für exponentielles, also prozentuales Wachstum

usw.

Dazu gehören die schon in Abschnitt (2) beschriebenen Differenzengleichungen. Sie haben links die Form $B(t+1) - B(t)$. Sie machen also eine Aussage über die Zunahme, also das Wachstum der Wachstumsfolge. Man spricht dann auch von der **Wachstumsrate.**

Bei stetigem Wachstum gibt $B(t+1) - B(t)$ eine mittlere Wachstumsrate für das Zeitintervall $[t; t+1]$ an. Dies kann man auch auf größere Intervalle ausdehnen. Dann versteht man unter der **mittleren Wachstumsrate** die Steigung der im Diagramm gedachten Strecke zwischen den Zustandspunkten $P_1(t_1 \mid B(t_1))$ und $P_2(t_2 \mid B(t_2))$: $\overline{R} = \frac{B(t_2) - B(t_1)}{t_2 - t_1}$ oder in kurzer Schreibweise $\overline{R} = \frac{\Delta B}{\Delta t}$. Die Wachstumsrate ist umso aussagekräftiger, je kleiner die zugrunde gelegte Zeitspanne ist. Lässt man $\Delta t \to 0$ gehen, entsteht aus der Sekantensteigung bekanntlich die Tangentensteigung, die ja über die 1. Ableitung der Wachstumsfunktion (Bestandsfunktion) berechnet wird:

Momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt t: $R(t) = B'(t) = ...$

Damit erhält man die Information, um welchen Betrag sich der Bestand zu einem bestimmten Zeitpunkt ändert. Diese Änderung wird dann angegeben in Größeneinheiten je Zeiteinheit, beim Wachstum also z. B. in m/Jahr. Dabei denkt man sich das Wachstum gleichmäßig fortgesetzt, also längst der Tangente im Diagramm. Aber schon im nächsten Moment gibt es eine andere Wachstumsrate. Statt „momentane Wachstumsrate" sagt man auch **Wachstumsgeschwindigkeit**.

Man sieht also, dass man mit diesem Hilfsmittel der Analysis wichtige Aussagen über den Wachstumsverlauf, also über die Änderung des Wachstums machen kann.

Dazu gibt es natürlich auch die **umgekehrte Aufgabe**: Man kann aus der gegebenen Wachstumsgeschwindigkeit R(t) durch Integration die Bestandsfunktion B(t) berechnen: $B(t) = \int R(t)\,dt$. Diese Aufgabenstellungen und Losungsbeispiele findet man im Text 45845.

8. Es gibt noch ganz andere Wachstumsmodelle.

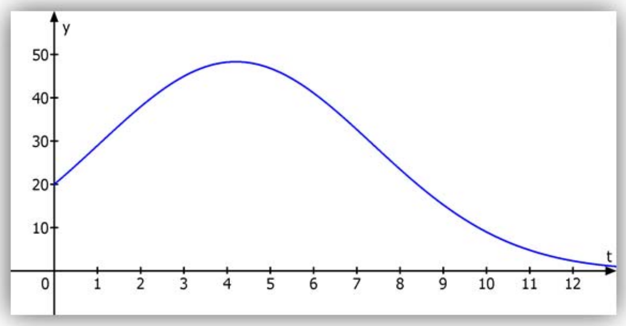
Im Grund kann man zu jeder Zustandsänderung eine Funktionsgleichung erstellen, die dann möglichst gut den Verlauf der Änderungen beschreibt. Beispiele dazu gibt es jedes Jahr in Abituraufgaben.

Etwa kann man die Länge einer **Warteschlange an einer Kinokasse** untersuchen. Diese beginnt bei 0, wächst dann an, erreicht ein Maximum und geht dann allmählich wieder auf 0 zurück. Eine zugehörige Funktion ganz exponentiell sein, oder auch gebrochen rational usw.
Den Aufgabenstellern sind da kaum Grenzen gesetzt.

Ein seit wenigen Jahren genanntes Modell heißt „vergiftetes Wachstum“. Man kann einer sich exponentiell wachsenden Bakterienmenge ein Gift verabreichen, so dass gleichzeitig das Absterben beginnt und sich dann so durchsetzt, dass die Population wieder auf 0 zurückgeht. Es gibt auch das Modell des **selbstvergiftenden Wachstums**. Bei einem biochemischen Prozess entsteht dann ein solches Gift, welches dann zur Vernichtung des Bestandes führt, oder auch nur zu einem stabilen Endzustand, in dem sich dann Wachsten und Sterben die Waage halten.

Das Schaubild zeigt den Verlauf eines vergifteten Wachstums. Die Funktion hat die Gleichung $f(t) = 20 \cdot e^{0{,}42 \cdot t - 0{,}05 \cdot t^2}$

In diesem Modell steigt die Menge des zugefügten Gifts linear mit der Zeit an.



Wachstumsfunktionen

Zurück	**Lineares Wachstum**	
18800	**Lineares Wachstum**	Themenheft mit viel Text und einigen Anwendungsaufgaben.
18801	**Lineares Wachstum**	Aufgaben.
Zurück	**Wachstumsmodelle - für Klassenstufe 10 und höher**	
18810	**Exponentielles Wachstum 1**	Warum Exponentialfunktionen prozentuales Wachstum beschreiben können. **Prozentuale Zunahme** (Guthaben, Bakterien und Pilze, Bevölkerung) **Prozentuale Abnahme** (Radioaktiver Zerfall, Bakteriensterben) **Die wichtigsten Grundaufgaben zum Wachstum**.
18811	**Schulstunde - Exponentielles Wachstum 2**	Exponentielles (prozentuale) Zunahme
18812	**Schulstunde Exponentielles Wachstum 3**	Exponentielles (prozentuale) Abnahme
18815	**Exponentielles Wachstum 4**	Große Aufgabensammlung auch mit Finanzmathematik
18820	**Begrenztes Wachstum 1**	Themenheft mit sehr viel erklärendem Text. Auch zur **begrenzten Abnahme** auf "Nicht-Null". Viele sehr ausführliche Musteraufgaben. Teil 2 in der Oberstufe
18821	**Begrenztes Wachstum 2**	Aufgabensammlung
18822	**Schulstunde Begrenztes Wachstum 3**	Begrenzte Zunahme
18823	**Schulstunde Begrenztes Wachstum 4**	Begrenzte Abnahme
	Wachstumsmodelle - für die Oberstufe	
45800	**Zentraltext**	**Übersicht und Fundstellen**.
45802	**Mathematische Hintergründe**	zum Wachstum
45810	**Exponentielles Wachstum 4**	**Exponentielles** Wachstum, Wachstumsrate, Differentialgleichung auch CAS-Einsatz (Oberstufentext)
45811	**Exponentielles Wachstum 5**	Aufgabensammlung
45820	**Begrenztes Wachstum 5**	**Begrenztes** Wachstum, Wachstumsrate, Differentialgleichung auch CAS-Einsatz.
45822	**Begrenztes Wachstum 6**	EXCEL-Tabellen zur beschränkten Abnahme / Wachstum
45823	**Begrenztes Wachstum 7**	Große Aufgabensammlung
45830	**Logistisches Wachstum 1**	**Logistisches** Wachstum, auch CAS-Einsatz.
45831	**Logistisches Wachstum 2**	Aufgaben zum **logistischen Wachstum**
45832	**Schulstunde - Logistisches Wachstum 3**	Logistisches Wachsatum
45840	**Vergiftetes Wachstum**	Theodie und große Aufgabensammlung
45845	**Wachstum mit Differenzialgleichungen**	Meist **Abituraufgaben**, teils geändert bzw. erweitert