Lernblatt WURZELN

Kurvendiskussionen
bei Wurzelfunktionen

Kompakter Text zur Wiederholung

Datei Nr. 44 050

Stand 10. Februar 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Hinweise

Der vorliegende Text ist nur zur Wiederholung geeignet, da er schnell und ohne große Zwischenrechnungen vorangeht.

Zum gründlichen Lernen und Üben verwende man diese Texte:

18121	Wurzelfunktionen, deren Schaubilder Halbparabeln und Halbkreise sind.
44012	Ableitungen
44020	Methoden der Kurvendiskussionen bei Wurzelfunktionen mit viel Training und Musterbeispielen

Inhalt dieses Textes

Lernblatt 1 Kurvendiskussionen bei Wurzelfunktionen - Übersicht

1. Definitionsbereiche:

1. Bedingung: Radikand $\boxed{\geq 0}$

2. Bedingung: Nenner $\neq 0$

Beim Produkt "Term mal Wurzel" kann es Einsiedler geben, die dann noch zum Definitionsbereich gehören.

2. Nullstellen: Bedingung: $f(x_N) = 0$

Beim Quadrieren einer Summe mit einer Wurzel können Lösungen von anderen Funktionen dazukommen, weshalb die Probe erforderlich wird.

3. Ableitungen mit Potenzregel, Kettenregel, Produkt- und Quotientenregel.

Hilfreich sind $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ bzw. $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

4. Extrempunkte:

Bedingung für **Extrempunkte mit waagerechter Tangente**: $\boxed{f'(x_E) = 0}$.

Die Kontrolle: $f''(x_E) < 0$ ergibt ein relatives Maximum,

$f''(x_E) > 0$ ergibt ein relatives Minimum.

Ist der Definitionsbereich auf einer Seite abgeschlossen, dann besitzt die Kurve dort einen **Randextrempunkt**. Hat f' an dieser Stelle einen Pol, dann hat die Kurve in diesem Randpunkt eine **senkrechte Tangente**.

Die Entscheidung, ob ein Randpunkt Hoch- oder Tiefpunkt ist, geschieht mit dem Vorzeichen von f' in einem angrenzenden Intervall (Monotonie).

Beispiel: Ist $\mathbf{D} = [\, a\,;b\, [$ und gilt $f'(x) > 0$ für a<x<b (b eine geeignete Zahl), dann liegt am linke Rand der Tiefpunkt T (a **I** f(a)) vor.

Merke: Am linken Rand steigend: Tiefpunkt /… fallend: Hochpunkt.
Am rechten Rand steigend: Hochpunkt /… fallend: Tiefpunkt.

Da es bei Wurzelfunktionen vorkommen kann, dass die Nullstellen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion **außerhalb des Definitionsbereiches** von f liegen, führen diese dann nicht zu Extrem- und Wendepunkten. Man sollte also stets zuerst überprüfen, ob diese Nullstellen zu **D** gehören.

5. **Asymptoten** können dann auftreten, wenn ein Bruchterm vorliegt.
Man geht dann genauso vor wie bei gebrochen rationalen Funktionen.

Lernblatt: 2 Definitionsbereich von Wurzelfunktionen

Es gibt drei Bedingungen für Definitionsbereiche:

1. Der Nenner eines Bruches darf nie Null werden
(denn man kann nicht durch Null dividieren)
2. Der Radikand einer Wurzel darf nie negativ werden
(denn aus negativen Zahlen kann man keine Wurzel ziehen)
3. Das Argument einer Logarithmusfunktion muss positiv sein
(denn jede Potenz einer positiven Basis ist wieder positiv)

Beispiel 1: $f(x)=\sqrt{x+4}$

Bed.: $\boxed{Rad \geq 0} \Leftrightarrow x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$ **D** $=[-4;\infty[$

Linker Randpunkt $L(-4\,|\,0)$

Beispiel 2: $f(x)=\frac{4}{\sqrt{2x}}$

Bed.: $\boxed{Rad > 0} \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ **D** $=]0;\infty[$

Jetzt musste 0 ausgeschlossen werden, weil der Radikand im Nenner steht.
Das Schaubild besitzt keinen Randpunkt.

Beispiel 3: $f(x)=4-\sqrt{2-x}$

Bed.: $\boxed{Rad \geq 0} \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ **D** $=]-\infty;2[$

Man achte darauf, dass bei Multiplikation / Division mit einer negativen Zahl die Ungleichung ihre Richtung ändert!

Rechter Randpunkt $R(2\,|\,4)$

Beispiel 4: $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

Bed.: $\boxed{Rad \geq 0} \Leftrightarrow x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4$ ***)**

D $=\mathbb{R} \setminus]-2;2[$ mit 2 Randpunkten L (- 2 I 0), R (2 I 0).

Tipps zum Lösen quadratischer Ungleichungen siehe nächste Seite.

Beispiel 5: $f(x)=x\sqrt{6-x^2}$

Bed.: $\boxed{Rad \geq 0} \Leftrightarrow 6-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \geq -6$

$x^2 \leq 6 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$

D $=\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]$

Beispiel 6: $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$

Bed.: $\boxed{Rad \geq 0} \Leftrightarrow 8x-x^2 \geq 0$ **D** $=[0;8]$

Beispiel 7: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2x}}$

Bed.: $\boxed{Rad > 0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+4x > 0$ **D** $=\mathbb{R} \setminus [-4;0]$

Beispiel 8: $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x}}$

Bed.: $\boxed{Rad \geq 0} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+2}{x}} \geq 0$ und $x \neq 0$

Lösung mit einer ***Vorzeichentabelle*** (siehe nächste Seite)

D $=\,]-\infty;-2] \cup]0,\infty[\overset{\text{oder}}{=} \mathbb{R} \setminus]-2;0]$

Hilfen:

Lösen rein-quadratischer Ungleichungen

Vorwissen: $\sqrt{x^2} = |x|$, denn eine Wurzel ist laut Definition stets positiv!

1. Größer-Ungleichung:

$\boxed{x^2 \geq 4}$

d. h. $|x| \geq 2$

Dies gilt für alle Zahlen, die von 0 <u>mindestens</u> den Abstand 2 haben:

also $x \leq -2$ oder $x \geq 2$

$L =]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$

oder $L = \mathbb{R} \setminus]-2; 2[$

2. Kleiner-Ungleichung

$\boxed{x^2 \leq 4}$

$|x| \leq 2$

Dies gilt für alle Zahlen, die von 0 <u>höchstens</u> den Abstand 2 haben:

also $-2 \leq x \leq 2$

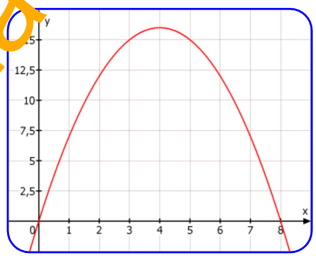
$L = [-2; 2]$

Lösen gemischt-quadratischer Ungleichungen

1. Fall: $8x - x^2 \geq 0$

Man untersucht die Hilfsparabel $y = -x^2 + 8x$.
Sie ist wegen des negativen Koeffizienten von x^2 nach unten geöffnet und hat diese Nullstellen:
$x(-x+8) = 0$ also $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$.
Also hat die Parabelfunktion zwischen den Nullstellen, also in $]0;8[$ positive Werte. Da es aber ≥ 0 heißt:

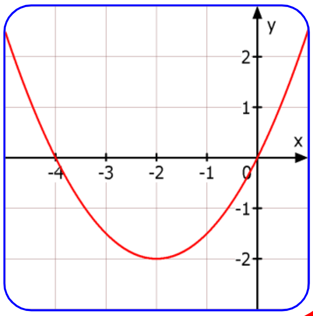
$L = [0;8]$



2. Fall: $\frac{1}{2}x^2 + 2x \geq 0$

Die Hilfsparabel $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ ist nach oben geöffnet und hat die Nullstellen:
$x\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = 0$ also $x_1 = 0$ und $x_2 = -4$.
Also hat die Parabelfunktion zwischen den Nullstellen negative Werte und außen positive.

$L =]-\infty; -4] \cup [0; \infty[= \mathbb{R} \setminus]-4; 0[$



Lösen von Ungleichungen aus Produkt oder Bruch

Die Ungleichungen $x \cdot (x+2) \geq 0$ oder $\frac{x+2}{x} \geq 0$ kann man mit einer Vorzeichentabelle lösen. In die erste Zeile schreibt man die Nullstellen der beiden Terme.
Dann trägt man ein, welche Vorzeichen sie in den Teilintervallen haben.

In der letzten Zeile folgt das Ergebnis-Vorzeichen (gleiche Vorzeichen → +)

		-2		0	x
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
Radikand	$+$		$-$		$+$

Lösungsmenge für das Produkt: $\mathbf{L} =]-\infty; -2] \cup [0; \infty[\overset{\text{oder}}{=} \mathbb{R} \setminus]-2; 0[$

Lösungsmenge für den Bruch: $\mathbf{L} =]-\infty; -2] \cup]0, \infty[\overset{\text{oder}}{=} \mathbb{R} \setminus]-2; 0]$

Beim Bruchterm wird die 0 ausgeschlossen, damit der Nenner nicht 0 wird.

Noch zwei Besonderheiten

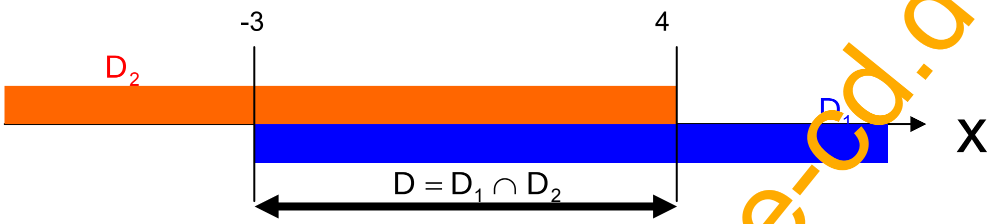
Beispiel 9: $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x}$

Jetzt müssen beide Radikanden die Bedingung ≥ 0 erfüllen:

1. Bedingung: $x+3 \geq 0$ d.h. $x \geq -3$ also ist $D_1 = [-3;\infty[$

2. Bedingung: $4-x \geq 0$ d.h. $x \leq 4$ also ist $D_2 =]-\infty;4]$

Beide Bedingungen müssen **zugleich** erfüllt sein! Dabei hilft eine Grafik:



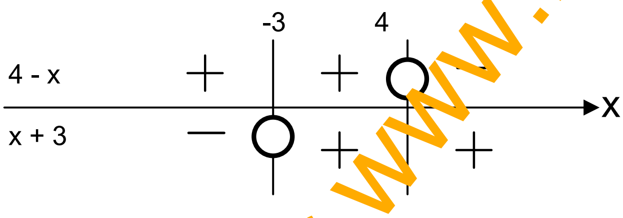
Der obere rote Balken stellt den Definitionsbereich $D_2 =]-\infty;4]$ der ersten Wurzel dar,

der untere blaue Balken den Definitionsbereich $D_1 = [-3;\infty[$ der zweiten Wurzel.

Die Schnittmenge $D = D_1 \cap D_2 = [-3;4]$ ist der gesuchte Definitionsbereich der Funktion f.

Dies kann man auch elegant in einer sogenannten **Vorzeichentabelle** erledigen:

Erklärung:



Die Gerade mit der Gleichung **y = 4 - x** hat die Nullstelle bei 4 und negative Steigung, also hat der Term **4 - x** rechts von 4 negative Werte und links von 4 positive.

Die Gerade mit der Gleichung **y = x + 3** hat die Nullstelle bei - 3 und positive Steigung, also hat der Term **x + 3** rechts von -3 positive Werte und links von -3 negative.

Man erkennt, dass nur im Intervall **zwischen** - 3 und 4 beide Radikanden positiv sind.

Da Rad = 0 auch noch erlaubt ist, geht folglich der Definitionsbereich **von** -3 **bis** 4: $D = [-3;4]$

Beispiel 10: Eine Besonderheit zeigt die Funktion $f(x) = x\sqrt{x-2}$.

Aus der Bedingung Radikand ≥ 0 folgt zunächst $x \geq 2$. Doch ist $D = [2;\infty[$ nicht der Definitionsbereich. Es gibt noch außerhalb dieser Menge noch eine Zahl mit einem reellen Funktionswert. Das ist die Zahl 0.

Während man $f(1) = 1 \cdot \sqrt{1-2} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ keine reelle Zahl gibt, klappt das bei

$f(0) = 0 \cdot \sqrt{-2} = 0$, da auch beim Rechnen mit imaginären

Zahlen die Regel gilt, dass das Produkt mit 0 wieder 0 ergibt.

Ergebnis:

Diese Kurve besitzt einen sogenannten **Einsiedlerpunkt:** E (0 I 0). Und der endgültige Definitionsbereich ist $D = \{0\} \cup [2;\infty[$!!! **Der Ursprung gehört also noch als isolierter Punkt zum Schaubild dazu.**

Lernblatt 3: Ableiten von Wurzelfunktionen

Grundregeln für die folgenden Ableitungen

1. Potenzregel: $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$
2. Konstante-Faktoren-Regel: $f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$
3. Summenregel: $(u+v)' = u' + v'$
4. Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
5. Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
6. Kettenregel: $f(u(x)) = f'(u) \cdot u'(x)$

1.

Grundformel für viele Wurzelfunktionen $\boxed{\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Man beweist sie mit der Potenzregel: $\sqrt{x}' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ist das Argument ein komplexerer Term, dann muss zusätzlich die Kettenregel angewandt werden, d.h. man multipliziert mit der inneren Ableitung:

(a) $\sqrt{4-x}' = \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \cdot (-1) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$

(b) $\sqrt{x^2-4}' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

(c) $\sqrt{-x^2+8x}' = \frac{(-2x+8)}{2\sqrt{-x^2+8x}} = \frac{-2(x-4)}{2\sqrt{-x^2+8x}} = -\frac{x-4}{\sqrt{-x^2+8x}}$

Merke:

Wurzelableitungen

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Tipp: Konstante Faktoren abspalten!

(d) $f(x)=\sqrt{2x}$ Man kann normal rechnen: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x}}$, was aber vielen Probleme bereitet .

Da der Radikand jedoch den konstanten Faktor 2 beinhaltet, sollte man $\sqrt{2}$ abspalten:

$f(x)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}$ Der Faktor $\sqrt{2}$ bleibt nun einfach stehen:

$\boxed{f'(x)=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}}$. Man könnte durch $\sqrt{2}$ kürzen, kann das aber so stehen lassen.

(d) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{t}}$ Hier wird dieser Trick noch hilfreicher:

Zuerst die „übliche" Ableitung mit der Kettenregel:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{t}}}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{2t\sqrt{\frac{x}{t}}}=\frac{1}{2\frac{t}{\sqrt{t}}\sqrt{x}}=\frac{2}{2\sqrt{t}\sqrt{x}}$$

Nun die <u>Ableitung nach Abspaltung des konstanten Faktors</u>:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{t}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{t}}}\cdot\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad \boxed{f'(x)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{t}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{x}}}$$

Die zweite Möglichkeit ist bedeutend einfacher und vermeidet Fehler!

2. Weitere Ableitungen mit der Potenzregel

(f) $f(x)=x\sqrt{x}$ verwandelt in $\boxed{f(x)=x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}}$

(g) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

(h) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x+4}}=4(x+4)^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x)=-2(x+4)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{(x+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-2}{\sqrt{x+4}^{3}}=\frac{-2}{(x+4)\sqrt{x+4}}$

Welches Endergebnis man festhält ist Geschmackssache.

Zur zweiten Ableitung nimmt man sicher den ersten Term:

$$f''(x)=-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x+4)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{(x+4)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{\sqrt{x+4}^{5}}=\frac{3}{(x+4)^{2}\sqrt{x+4}}$$

(i) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

3. Ableitungen mit der Produktregel

(j) $f(x) = x\sqrt{4-x}$

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{4-x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{4-x}}(-1) = \sqrt{4-x} - \frac{x}{2\sqrt{4-x}}$$

Nun sollte man beide Summanden in einen Bruch schreiben.
Dazu wird der erste Term mit $2\sqrt{4-x}$ erweitert:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{4-x}^2 - x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$$

Für die zweite Ableitung benötigt man die Quotientenregel, s.u.

(k) $f(x) = x^2\sqrt{x+t}$

$$f'(x) = 2x\cdot\sqrt{x+t} + x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+t}} = \frac{4x(x+t)+x^2}{2\sqrt{x+t}} = \frac{5x^2+4tx}{2\sqrt{x+t}}$$

4. Ableitungen von Bruchtermen

(l) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x+4} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}}\cdot x}{x+4}$$

Den Doppelbruch beseitigt man, indem man mit $2\sqrt{x+4}$ erweitert, also Zähler und Nenner damit multipliziert. Dies sieht ganz ausführlich so aus:

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x+4}\cdot 2\sqrt{x+4} - \frac{2\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}}\cdot x}{(x+4)\cdot 2\sqrt{x+4}} = \frac{2(x+4)-x}{2\cdot\sqrt{x+4}^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x+8}{\sqrt{x+4}^3}$$

(m) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+9}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+9}}}\cdot\frac{1\cdot(x^2+9) - 2x\cdot x}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{9-x^2}{(x^2+9)^2}$$

Für die innere Ableitung wird die Quotientenregel benötigt. Nun kann man $\sqrt{x^2+9} = (x^2+9)^{\frac{1}{2}}$ herauskürzen, wodurch sich im Nenner die Hochzahl um $\frac{1}{2}$ verkleinert:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot\frac{9-x^2}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9-x^2}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2+9}^3}$$

(n) $f(x) = \frac{4-\sqrt{x}}{x} = \frac{4}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}$

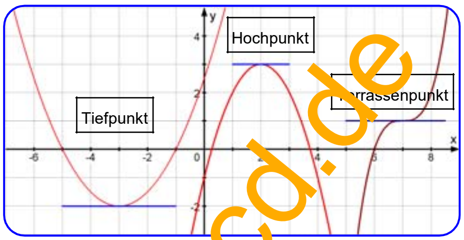
Da im Nenner keine Summe steht, zerlegt man den Bruch in einzelne Brüche und leitet mit der Potenzregel ab !

$$f'(x) = -4x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-8+x^{\frac{1}{2}}}{2x^2} = \frac{\sqrt{x}-8}{2x^2}$$

Lernblatt 4: Extrempunkte und Wendepunkte bei Wurzelfunktionen

1. Extrempunkte mit waagerechter Tangente

Wissen: Durch die Gleichung $f'(x_E)=0$ findet man Stellen mit einer waagerechten Tangente.
Es gibt drei Arten von Punkten mit waagerechter Tangente:



Methoden:

Extrempunkte mit waagerechter Tangente:

1. Schritt (Notwendige Bedingung): $f'(x)=0$ liefert x_E ....
2. Schritt: y-Koordinate berechnen: $y_E=f(x_E)$.
3. Schritt (Hinreichende Bedingung):

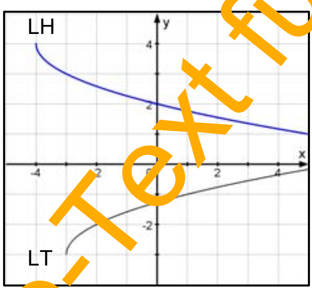
Wenn $f''(x_E)<0$, dann ist $H(x_E \mid f(x_E))$ **Hochpunkt.**

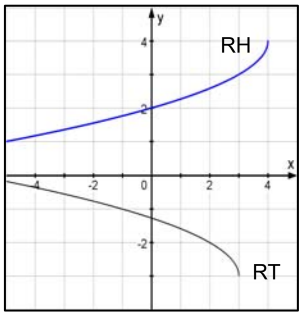
Wenn $f''(x_E)>0$, dann ist $T(x_E \mid f(x_E))$ **Tiefpunkt.**

Terrassenpunkte sind keine Extrempunkte sondern **Wendepunkte mit waagerechter Tangente**. Sie werden so identifiziert:

Wenn $\boxed{f'(x_1)=0 \text{ und } f''(x_1)=0 \text{ und } f'''(x_1)\neq 0}$, dann ist $W(x_1 \mid f(x_1))$ ein **Terrassenpunkt**.

2. Rand-Extrempunkte





Oben: $f(x)=4-\sqrt{x+4}$

$D=[-4;\infty[$ und $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x+4}}$

Linker Randhochpunkt, denn für x>-4 ist $f'(x)<0$ $\Rightarrow$ K fällt streng monoton.

Unten $f(x)=\sqrt{x+3}-3$

$D=[-3;\infty[$ und $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

Linker Randtiefpunkt: $f'(x)>0$

Also steigt K streng monoton.

Oben: $f(x)=4-\sqrt{4-x}$

$D=]-\infty;4]$ und $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$

Rechter Randhochpunkt, denn für x < 4
Ist $f'(x)>0$ $\Rightarrow$ K steigt streng monoton.

Unten: $f(x)=\sqrt{3-x}-3$

$D=]-\infty;3]$ und $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

Rechter Randtiefpunkt: $f'(x)<0$

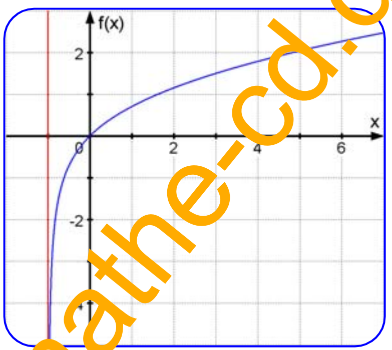
Also fällt K streng monoton.

In Randextrempunkten findet man oft eine **senkrechte Tangente:**

In allen vier Fällen hat die Ableitungsfunktion f' an der Randstelle eine Polstelle. Wenn man sich daran erinnert, dass bei Annäherung an eine Polstelle die Werte gegen $\pm\infty$ gehen, und wenn man bedenkt, dass man mit f' Tangentensteigungen berechnet, dann wird klar, dass eine Polstelle von f' an einer Randstelle auf eine "unendlich große Steigung" hinweist: auf eine senkrechte Tangente.

Nicht jede zu einer Wurzelfunktion gehörende Kurve hat Randpunkte

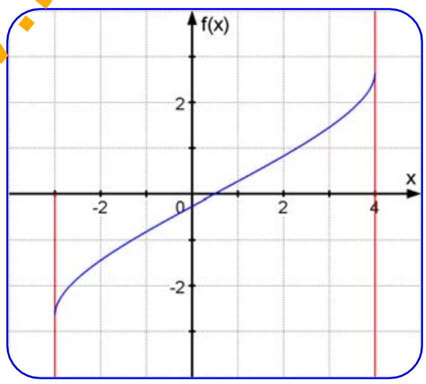
Beispiel: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$



Weil die Wurzel im Nenner steht, gilt für den Definitionsbereich die Bedingung: Radikand > 0, und das ergibt x > - 1.
Also ist $D =]-1;\infty[$.
Hier gibt es keinen Randpunkt.
Vielmehr besitzt f bei x = - 1 eine Polstelle, was uns zu einer senkrechten Asymptote führt.

Aber es gibt auch Wurzelfunktionen mir zwei und mehr Randpunkten:

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x}$



Der Definitionsbereich ist hier die Schnittmenge der beiden einzelnen Definitionsbereiche

$$D = [-3;\infty[\cap]-\infty;4] = [-3;4]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

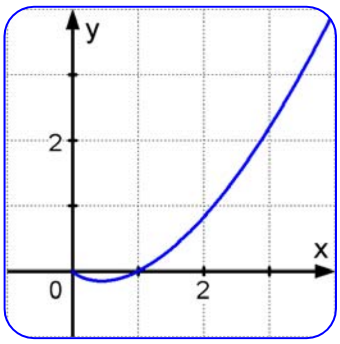
Die rechte Seite ist als Summe zweier Brüche, die selbst nur positive Werte annehmen können, immer positiv. Also gilt für alle $x \in D$ $f'(x) > 0$.

Dies liefert die Begründung dafür, dass der linke Randpunkt $L\left(-3 \mid -\sqrt{7}\right)$ ein Tiefpunkt und der rechte Randpunkt $R\left(4 \mid \sqrt{7}\right)$ ein Hochpunkt ist.

In beiden Punkten finden wir wieder senkrechte Tangenten, da f' bei - 3 und bei 4 je eine Polstelle hat.

Es gibt auch Randpunkte mit schräger Tangente:

Beispiel: $f(x) = x\sqrt{x} - x = x^{\frac{3}{2}} - x$



$$D = [0;\infty[$$

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} - 1 = \tfrac{3}{2}\sqrt{x} - 1$$

f' hat am linken Rand keinen Pol. Dort berechnet man die Tangentensteigung: $f'(0) = -1$

Schwierigere Vorzeichenuntersuchungen für f' :

Beispiel 1: $f(x) = x\sqrt{x} - x = x^{\frac{3}{2}} - x$

Schon das letzte Beispiel macht es uns beim Nachweis des Rand-Hochpunktes nicht mehr so einfach. Wie man im Schaubild sieht, fällt die Kurve zuerst, dann steigt sie. Doch dies soll ja, zumindest im Leistungskurs, mathematisch geklärt und nicht aus der Zeichnung abgelesen werden.

Man muss also eine Vorzeichenuntersuchung für f' durchführen.

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1$.

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$: $\frac{3}{2}\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$ (Die Probe stimmt!)

$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$ Diese ist stets positiv.

Folgerung: Die Kurve hat bei $x = \frac{4}{9}$ einen Tiefpunkt. Und folglich fällt f links davon.

Also hat K am linken Rand (bei x = 0) einen Hochpunkt.

Beispiel 2:

$f(x) = x \cdot \sqrt{4-x}$ mit $D =]-\infty;4]$

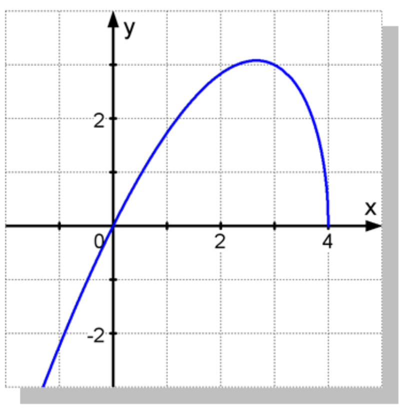
$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{4-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$.

Das Schaubild hat erkennbar am rechten Rand den Tiefpunkt T (4 I 0).

$f''(x) = \frac{1}{4} \frac{3x-16}{\sqrt{4-x}^3}$

Damit findet man den Hochpunkt mit waagerechter Tangente $H\left(\frac{8}{3} \,\middle|\, \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$
(ohne Nebenrechnungen)

Folglich fällt das Schaubild rechts davon. Also liegt am rechten Rand ein Tiefpunkt, der übrigens auch wieder eine senkrechte Tangente hat.

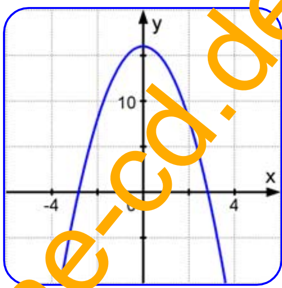


Beispiel 3:

$f(x) = x\sqrt{16-x^2}$ mit $f'(x) = \dfrac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$ $\quad D_f = [-4;4],\ D_{f'} =]-4;4[$

Nullstellen von f' : $x = \pm\sqrt{8}$

Nun schlagen wir folgenden anderen Weg ein: Wir stellen eine richtige Monotonie-Untersuchung an. Die könnte man als Aufgabe auch so formulieren:



Untersuche die Monotonie der Funktion f.

Da der Nenner als Wurzel stets positiv ist, hängt das Vorzeichen von f' also nur vom Zähler Z = 16 - 2x^2 ab.

Dieser Zähler stellt geometrisch gesehen eine nach unten geöffnete Parabel dar, welche die Nullstellen $-\sqrt{8}$ und $\sqrt{8}$ hat.

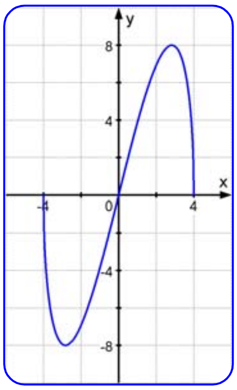
Also hat der Zähler zwischen den Nullstellen positive Werte und im Außenbereich negative.

Übertragen auf die Ableitungsfunktion und die Monotonie heißt dies:

Im Intervall $]-4;-\sqrt{8}[$ ist $f'(x) < 0$ d.h. dort fällt f streng monoton.

Im Intervall $]-\sqrt{8};\sqrt{8}[$ ist $f'(x) > 0$ d.h. dort wächst f streng monoton.

Im Intervall $]\sqrt{8};4[$ ist $f'(x) < 0$ d.h. dort fällt f streng monoton.



Nun wissen wir alles, was wir zur Begründung der Randextrempunkte brauchen:

Da f vom linken Rand aus fällt, ist $L(-4\,|\,0)$ ein Rand-Hochpunkt.

Da f zum rechten Rand hin fällt, ist $R(4\,|\,0)$ ein Rand-Tiefpunkt.

Es sind gerade in den letzten Beispielen zwei verschiedene Methoden zum Nachweis von Rand-Extrempunkten gezeigt worden. Sie geschehen stets über die Monotonie, also über das Vorzeichen von f'.
Da diese Verfahren nicht häufig vorkommen, erfordern sie viel Übung.
Wenn man nicht wiederholt, gerät dies in Vergessenheit!

Und immer daran denken: Bei Wurzelfunktionen gibt es meistens außer den Extrempunkten mit waagerechten Tangenten auch noch Rand-Extrempunkte. NICHT VERGESSEN!

3. Wendepunktberechnungen

3-Schritt-Methode

1. Bedingung: $f''(x)=0$ Daraus folgt x_W = ...
2. y-Koordinate berechnen: $y_W = f(x_W)$.
3. Kontrolle: Wenn $f'''(x_W) \neq 0$
   dann ist $W(x_W \mid y_W)$ Wendepunkt.

Hinweise:

1. Die Kontrolle (hinreichende Bedingung) ist oft schwer zu erbringen, weil bei Wurzelfunktionen eine 3. Ableitung oft nur schwer berechenbar wird,

   Dann kann man den Nachweis des Wendepunktes auch so führen, dass man zeigt, dass f'' an der vermeintlichen Wendestelle x_W einen Vorzeichenwechsel hat.

   Denn: Gilt in einem Intervall $f''(x)<0$, dann hat dort das Schaubild Rechtskrümmung, gilt aber $f''(x)>0$, dann Linkskrümmung.

   Und ein Wendepunkt liegt ja gerade dann vor, wenn sich dort die Krümmung der Kurve in ihrer Art verändert.

2. Es gibt Wendepunkte mit waagerechter Tangente. Man nennt diese Terrassenpunkte oder Sattelpunkte.

   Diese zeichnen sich dadurch aus, dass man sie bereits bei der Suche nach Extrempunkten findet. Denn weil sie eine waagerechte Tangente besitzen, tauchen sie bereits als Lösung der Gleichung $f'(x)=0$ auf.
   Dann führt die Extrempunktkontrolle erst einmal zu $f''(x)=0$, worauf man „Verdacht auf Wendepunkt" konstatiert und dann dazu die Kontrolle durchführt. (Siehe Seite 11 unten!)

Schlusswort

Die beschriebenen Methoden besagen alle: Wenn das oder das gilt, dann liegt ein Extrempunkt bzw. Wendepunkt vor.

Es gibt jedoch auch Extrempunkte bzw. Wendepunkte, die man mit diesen Methoden nicht bekommt, etwa weil sie Flachpunkte sind oder Kurven-Spitzen. Dies tritt jedoch nicht häufig auf und wurde hier nicht besprochen.