

Zins und Zinseszins

Auch für die Oberstufe geeignet

Text Nr. 18911

Stand: 17. November 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

In vorliegendem Text wird kompakt die Grundlage wiederholt.

Zu diesem Thema gibt es folgende ausführlicheren Texte:

10561	Gründliche Einführung (Zins) mit Musterbeispielen.
10581	Test zum Erkennen des Wissensstandes. Lösungen in 10580.
10580	Grundlagentraining zu Prozent, Mehrwertsteuer und Zins
10570	Aufgabensammlung 1

Es gibt weitere Texte zur Finanzmathematik auf höherem Niveau (Klasse 10 und höher):

18911	Finanzmathematik 1 - Zinsrechnung
18921	Finanzmathematik 2 - Ratensparen und Rentenauszahlung
18931	Finanzmathematik 3 – Darlehen
18941	Finanzmathematik 4 - Aufgabensammlung aus 18911, 18921, 18931 mit Lösungen

Inhalt

1	Was ist Zins (1 Grundaufgaben)	3
2	Was ist Zinseszins? Kontostände rekursiv berechnen	6
3	Variabler Zinssatz	9
4	Monatliche Verzinsung	10
5	Kontostandvergleich bei verzögertem Beginn	11
6	Musterbeispiele zu verschiedenen Aufgabenstellungen	15
7	6 Trainingsaufgaben	19
8	Lösung der Trainingsaufgaben	20

1. Was ist Zins?

Wenn wir einen Geldbetrag auf ein Konto einzahlen, leihen wir der Bank sein Geld. Dafür gibt sie uns den Zins. Das eingezahlte Kapital wird mit einem bestimmten Prozentsatz (Zinssatz) verzinst, die Bank schreibt uns also den sich so ergebenden Prozentwert auf unserem Konto gut.

Je nach Zeitraum, für den der Zins berechnet wird unterscheidet man zwischen Jahreszins, Monatszins usw. Die Schreibweise $p = 3\% \text{ p.a.}$ bedeutet „per annum = pro Jahr“.

1. Grundaufgabe: Zinsberechnung und Endkapital

Klaus legt $K = 2000 \text{ €}$ (K steht für Kapital) auf einem Konto der KPT-Bank an. Dies geschah zu einer Zeit, also es dafür noch $2,5\%$ Zins p. a. gab. Wie viel Zins erhält Klaus nach Ablauf eines Jahres dafür, und wie hoch ist dann sein Kontostand?

Es gibt zweierlei Lösungswege.

- Man kann mit den Regeln der Prozentrechnung den Zins, also den Prozentwert berechnen und diese dann zum eingezahlten Kapital addieren.

Berechnung von Zins und daraus das Endkapital.

$$2,5\% \text{ von } 2000 \text{ €} \quad \text{ergibt} \quad Z = 2000 \text{ €} \cdot 2,5\% = 2000 \text{ €} \cdot 0,025 = 50 \text{ €}$$

$$\text{Damit erhöht sich sein Kontostand nach 1 Jahr auf } K(1) = K(0) + Z = 2000 \text{ €} + 50 \text{ €} = 2050 \text{ €}.$$

- Man kann aber auch argumentieren: Das vorhandene Kapital ist 100% . Wird es um $2,5\%$ verzinst, dann ist das Endkapital $102,5\%$ des Anfangskapitals und berechnet dieses direkt.

Direkte Berechnung des Endkapitals:

$$102,5\% \text{ von } 2000 \text{ €} \quad \text{ist} \quad K(1) = 2000 \text{ €} \cdot 102,5\% = 2000 \text{ €} \cdot 1,025 = 2050 \text{ €}$$

Methode: Aus dem Anfangskapital $K(0)$ berechnet man mit dem Zinsfaktor p den Zinssatz Z und mit dem Zinsfaktor $q = 1 + p$ das Endkapital $K(1)$ nach 1 Jahr.

$$1. \text{ Zinsberechnung: } \boxed{\text{Kapital}} \xrightarrow{\cdot p} \boxed{\text{Zins}} \quad K(0) \xrightarrow{\cdot 0,025} Z$$

$$2. \text{ Kapitalberechnung: } \boxed{K(0)} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{K(1)} \quad K(0) \xrightarrow{\cdot 1,025} K(1)$$

Begründung: $K(1) = K(0) + \underline{\text{Zins}}$

Ersetzt man $\text{Zins} = K(0) \cdot p$

Dann folgt $K(1) = K(0) + K(0) \cdot p$

$K(0)$ ausklammern: $K(1) = K(0) \cdot \underbrace{(1+p)}_q$ also $\boxed{K(1) = K(0) \cdot q}$

2. Grundaufgabe: Berechnung des Zinssatzes

Herr Geizig legt 3820 € auf der Gutbank an. Nach eine Jahr informiert man ihn darüber, dass der Kontostand nunmehr 3953,70 € beträgt. Welchen Zinssatz legt die Bank zugrunde?

Dies ist eine angewandte Prozentaufgabe: **Wieviel sind 3953,70 € bezogen auf 3820 €?**

1. Lösung: Verwendung der Zinsformel: $K(1) = K(0) \cdot q$

Diese Formel stellen wir nach q um.

Das ergibt: $q = \frac{K(1)}{K(0)} = \frac{3953,7}{3820} \approx 1,035$

$3953,70 \div 3820$	1.035
Ans=	0.035

Weil $q = 1 + p$ ist, folgt weiter: $p = q - 1 = 0,035 = 3,5\%$

Ergebnis: Der Zinssatz betrug also 3,5 % p. a.

2. Lösung: Manche lösen Prozentaufgaben noch mit einem Dreisatz. Etwa so:

3820 €	entsprechen	100%	$3953,70 \div 3820$
			103.5

1 €	entspricht	$\frac{100}{3820} \%$	
-----	------------	-----------------------	--

3953,70 €	entsprechen dann	$\frac{100}{3820} \cdot 3953,70 \%$	$= \frac{305370}{3820} \%$
			$= 103,5\%$

Also hat das Kapital um 3,5 % zugenommen.

Ergebnis: Der Zinssatz betrug also 3,5 % p. a.

3. Grundaufgabe: Berechnung des Startkapitals:

Fritzchen berichtet: Auf meinem Konto sind jetzt nach 1 Jahr 13,77 €. Der Zinssatz beträgt 2%. Wie groß war das Startguthaben vor einem Jahr?

1. Lösung: Für die Berechnung des neuen Kontostandes hatten wir diese Formel: $K(1) = K(0) \cdot q$

Diese Formel stellen wir nach q um.

Umstellen: $K(0) = \frac{K(1)}{q} = \frac{13,77 \text{ €}}{1,02} = 13,50 \text{ €}$

$K(0)$	$\xleftrightarrow{\cdot q}$	$K(1)$
	$\xleftarrow{:q}$	

$13,77 \div 1,02$	13.5
-------------------	------

2. Lösung: Diese Prozentaufgabe: 102% sind 13,77 €. Wieviel sind 100%?

kann man auch als Dreisatz lösen:

102 %	entsprechen	13,77 €	
-------	-------------	---------	--

1 €	entspricht	$\frac{13,77}{102} \text{ €}$	
-----	------------	-------------------------------	--

$13,77 \div 102$	13.5
------------------	------

100 %	entsprechen	$\frac{13,77}{102} \text{ €} \cdot 100 = \frac{1377}{102} \text{ €}$	$= 13,50 \text{ €}$
-------	-------------	--	---------------------

Ergebnis: Das Startkapital war 13,50 €

4. Grundaufgabe: Berechnung von Startkapital / Endkapital aus dem Zins

Bei 3,25% Zinssatz wurden nach einem Jahr 58,50 € Zins angerechnet.

Wie groß war das Startkapital (Grundwert) und wie hoch ist das Endkapital?

1. Lösung: Durch Umstellung der Formel $Z = K(0) \cdot p$

$$\text{Es folgt: } K(0) = \frac{Z}{p} = \frac{58,50 \text{ €}}{0,0325} = 1800 \text{ €} \text{ (Startkapital)}$$

$$\text{Daraus: } K(1) = K(0) \cdot 1,0325 = 1858,50 \text{ € (Endkapital)}$$

$$\text{Kapital} \xleftrightarrow{\cdot p} \text{Zins}$$

$$\begin{array}{r} 58,50 \div 0,0325 = 1800 \\ \text{Ans} \times 1,0325 = 1858,5 \end{array}$$

2. Lösung: als Dreisatz:

3,25 % entsprechen 58,50 €

1 % entspricht $\frac{58,50}{3,25}$ €

100 % entsprechen $\frac{58,50}{3,25} \text{ €} \cdot 100 = \frac{5850}{3,25} \text{ €} = 1800 \text{ €}$

103,25 % entsprechen $\frac{58,50}{3,25} \text{ €} \cdot 103,25 = \frac{58,50 \cdot 103,25}{3,25} \text{ €} = 1858,5 \text{ €}$

$$\begin{array}{r} 5850 \div 3,25 = 1800 \\ 58,50 \times 103,25 \div 3,25 = 1858,5 \end{array}$$

Trainingsaufgaben

- (1) Wie viel Zins erhält Peter auf sein Guthaben in Höhe von 1250 € nach einem Jahr bei 3% Zins?
- (2) Claudia hat bei einem Jahreszinssatz von 2,5% 11,80 € Zins erhalten. Wie hoch war ihr Kontostand, wenn ein Jahr lang nichts eingezahlt oder abgehoben worden ist?
- (3) Friedrich stellt fest, dass sich sein Kontostand von 2412,38 € auf 2490,78 € erhöht hat. Welcher Zinssatz lag der Abrechnung zugrunde?
- (4) Herr Klamm erhält 27,01 € Zins und hat dann einen Kontostand von 1009,31 €. Wie hoch war der Zinssatz?
- (5) Fülle diese Tabelle aus:

	K(0) in €	Zins in €	K(1) in €	p	q
(a)	1800	54,00			
(b)	285		294,69		
(c)	487,28			5,2%	
(d)	12.628				1,04
(e)		128,45	3696,45		
(f)		21,45		2,6%	
(g)		262,50			1,0625
(h)			89349,75	8,5%	
(i)			8553,87		1,025