b) Wann beträgt die Temperatur 16°C?

$$16 = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^t$$

$$12 \cdot 0{,}9895^t = 22 - 16 \qquad | :12$$

$$0{,}9895^t = \frac{6}{12} = 0{,}5$$

Logarithmieren: $\log 0{,}9895^t = \log 0{,}5$

Logarithmenregel: $t \cdot \log 0{,}9895 = \log 0{,}5 \qquad | : \log 0{,}9895$

$$t = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9895} \approx 66$$

Diese Situation ist als Punkt P im Schaubild auf der Seite zuvor eingetragen.

Hinweis: Viele Schüler dürfen im Unterricht zum Lösen solcher Gleichungen geeignete Rechner verwenden (Grafikrechner oder CAS-Rechner), dann entfällt diese logarithmische Berechnung. Mit TI Nspire CAS sieht das z. B. so aus:

$$\text{solve}\left(16=22-12\cdot(0.9895)^x,x\right) \qquad x=65.6668$$

c) Berechnung der Temperaturdifferenzen:

Für die Temperaturdifferenz gilt diese Berechnungsformel:

$$d(t) = S - T(t) = 22 - \left[22 - 12 \cdot 0{,}9895^t\right] = 12 \cdot 0{,}9895^t$$

Berechnung einiger Zahlenwerte:

Zur Zeit t = 0: $d(0) = 12$

Zur Zeit t = 1: $d(1) = 12 \cdot 0{,}9895$

Zur Zeit t = 2: $d(2) = 12 \cdot 0{,}9895^2$

Quotienten aufeinander folgender Differenzen: $\frac{d(2)}{d(1)} = \frac{12 \cdot 0{,}9895^2}{12 \cdot 0{,}9895} = 0{,}9895$

$$\frac{d(1)}{d(0)} = \frac{12 \cdot 0{,}9895}{12} = 0{,}9895$$

Wie man sieht, sind diese Quotienten konstant.
Beispiele genügen jedoch nicht, man muss dies allgemein beweisen:

Allgemein zur Zeit t: $d(t) = 12 \cdot 0{,}9895^t$

1 Minute später (d. h. zur Zeit t+1) $d(t+1) = 12 \cdot 0{,}9895^{t+1}$

Quotient: $$q = \frac{d(t+1)}{d(t)} = \frac{12 \cdot 0{,}9895^{t+1}}{12 \cdot 0{,}9895^t} = \frac{\cancel{12 \cdot 0{,}9895^t} \cdot 0{,}9895}{\cancel{12 \cdot 0{,}9895^t}} = 0{,}9895$$

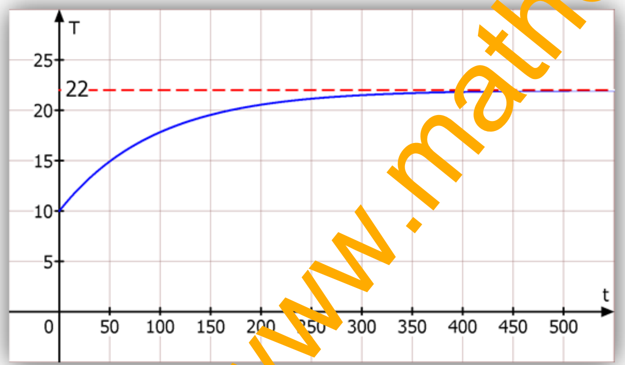
Es gilt also $d(t+1) = q \cdot d(t)$ mit $q = 0{,}9895$. Der Prozentsatz der Abnahme der Temperatur-Differenzen isr also $p = 1 - q = 0{,}0105 = 1{,}05\%$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Ich schließe ein paar Überlegungen an, die klar werden sollten:

Diese begrenzte Zunahme der Temperatur geschieht und er Modellannahme, dass die Temperaturdifferenz in gleichen Zeitspannen um den gleichen Prozentsatz abnimmt. Hier hat sich die Abnahme pro Minute um 1,05% ergeben.

MERKE: Die Temperatur nimmt also nicht exponentiell zu,
sondern die Temperaturdifferenz zur Grenztemperatur nimmt exponentiell ab.

Damit geht die Soßentemperatur asymptotisch gegen die Zimmertemperatur. Diese wird damit theoretisch nie erreicht, aber irgendwann ist sie ihr so nahe, dass man den Unterschied nicht mehr messen kann. Dies zeigt vor allem das nächste Schaubild mit anderem Maßstab:



Jetzt wird klar, warum man hier von begrenztem Wachstum spricht. Das Wachstum wird durch die erwärmende Zimmertemperatur klar begrenzt, denn höher kann sie nicht steigen.
Je nach Genauigkeitsanspruch kann man eine Aussage darüber machen, wann die Zimmertemperatur erreicht sein wird. Mathematisch und modellmäßig gesehen nie, man kann aber einen Näherungwert von etwa 500 Minuten ablesen. Oder man fragt: Wann ist die Temperaturdifferenz weniger als 0,1°C?

$d(t) = 12 \cdot 0{,}9895^t < 0{,}1$ Die Lösung ist laut TI Nspire:

$\text{solve}\left(12\cdot(0.9895)^x<0.1,x\right)$ $x>453.554$

Jetzt wissen wir mehr: Nach 454 Minuten fehlen bis zur Zimmertemperatur laut mathematischem Erwärmungsmodell noch 0,1°C.

Merkmal für solche Aufgaben:

Beim beschränkten Wachstum nimmt die <u>Differenz zum Grenzwert</u> exponentiell ab,

Lösung Nr. 512

Erwärmung eines gekühlten Schokopuddings

Ein Schokopudding wird einem Kühlschrank entnommen. Seine Temperatur beträgt in diesem Moment 10 °C. Im Zimmer hat es 22 °C. Die Erwärmung verlaufe so, dass sich die Temperatur in jeweils 10 Minuten um 10% der Temperaturdifferenz zur Umgebung erhöht.

a) Stelle die Gleichung der Temperaturfunktion f(t) auf.
Zeichne ihr Schaubild mit $0 \le t \le 500$ min .

b) Wann hat sich der Mittelwert zwischen Anfangs- und Endtemperatur eingestellt?

c) Wann ist die Temperatur nur noch 1 Promille vom Grenzwert entfernt?

Lösung

a) **WISSEN**: Wenn die Temperaturdifferenz prozentual (d.h. exponentiell) abnimmt, dann liegt beschränktes Wachstums vor. Für die Temperaturfunktion gilt dann:

$$\boxed{T(t) = c + a \cdot q^t}$$

Dabei ist c die Grenztemperatur, also hier die Zimmertemperatur 22°C.

Ansatz: Temperaturfunktion: $T(t) = a \cdot q^t + 22$ (1)

Bestimmung von a und q durch Einsetzen zweier Wertepaare.

Zur Zeit t = 0 beträgt die Temperatur 10°C: $T(0) = 10$

Nach 10 Minuten hat die Differenz zur Zimmertemperatur 22°C um 10% abgenommen.
Zur Zeit t = 10 ist diese Differenz von ursprünglich 12 Grad auf 90%, d. h. auf $0{,}9 \cdot 12 = 10{,}8$ Grad zurückgegangen: $T(10) = 22 - 10{,}8 = 11{,}2$

$T(0) = 10$ eingesetzt: $10 = a \cdot \cancel{q^0} + 22$ (2)

Aus (2) folgt: $a = 10 - 22 = -12$

$T(10) = 11{,}2$ eingesetzt in (2): $11{,}2 = \underbrace{a}_{-12} \cdot q^{10} + 22$ (3)

Umstellen nach q: $12 \cdot q^{10} = 22 - 11{,}2 = 10{,}8$

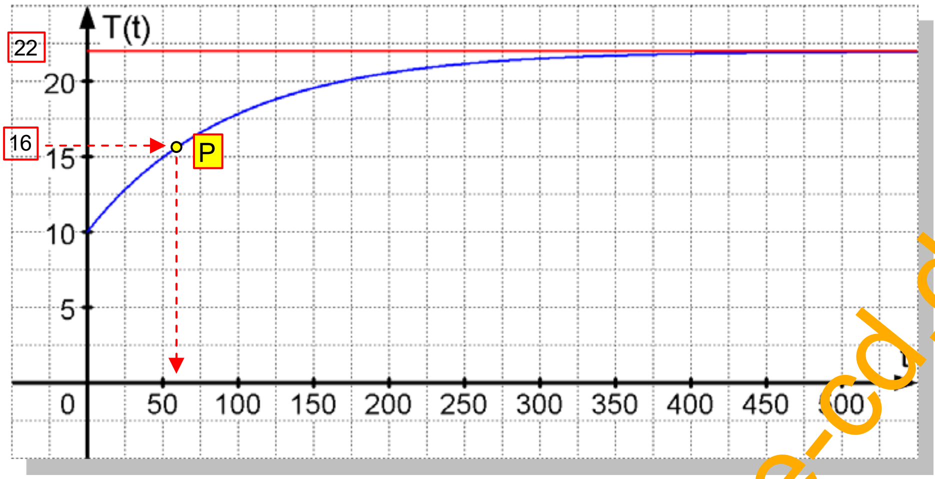
$$q^{10} = \frac{10{,}8}{12}$$

$$q = \sqrt[10]{\frac{10{,}8}{12}} \approx 0{,}9895$$

<u>Ergebnis:</u> $T(t) = -12 \cdot 0{,}9895^t + 22$

bzw. $\boxed{T(t) = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^t}$

Schaubild. Man erkennt die waagerechte Asymptote: T(t) = 22 bzw. y = 22.



b) Der Mittelwert zwischen 10° C und 22° C ist 16° C.

Temperaturfunktion: $T(t) = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^t$

Wann ist T = 16? $\boxed{16} = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^t$

Nach t umstellen: $12 \cdot 0{,}9895^t = 22 - 16$

$0{,}9895^t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Logarithmieren: $\log 0{,}9895^t = \log \frac{1}{2}$

Logarithmengesetze anwenden: $t \cdot \log 0{,}9895 = -\log 2$

$t = \dfrac{-\log 2}{\log 0{,}9895} \approx 65{,}7$

Erklärung: Nach einer Logarithmusregel ist $\log\frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$, denn log 1 = 0.

Ergebnis: Nach etwa 66 Minuten ist die Erwärmung zur Hälfte fortgeschritten.
Siehe Zustandspunkt P im Schaubild oben.

c) Wenn ist die Temperatur nur noch 1 Promille vom Grenzwert entfernt?

Achtung: Man meint $1\,^{\circ}/_{\circ\circ}$ von der aktuellen Temperatur T(t)

Ansatz daher: $d(t) = \frac{1}{1000} \cdot T(t)$

ausführlich: $12 \cdot 0{,}9895^t = \frac{1}{1000} \cdot \left(22 - 12 \cdot 0{,}9895^t\right)$

$12 \cdot 0{,}9895^t = 0{,}022 - 0{,}012 \cdot 0{,}9895^t$

$12{,}012 \cdot 0{,}9895^t = 0{,}022$

$0{,}9895^t = \dfrac{0{,}022}{12{,}012}$

$t \cdot \log 0{,}9895 = \log 0{,}022 - \log 12{,}012$

$t = \dfrac{\log 0{,}022 - \log 12{,}012}{\log 0{,}9895} \approx 597$

Ergebnis: Nach 597 Minuten (etwa 10 Stunden) ist 99,9% der Zimmertemperatur erreicht.

Lösung Nr. 521

Abkühlung eines Schokopuddings auf Zimmertemperatur

Eine 80°C heiße Vanillesoße kühlt auf Zimmertemperatur (22°C) ab.
Dabei nimmt die Temperatur pro 10 Minuten um 20 % der Temperaturdifferenz ab.

a) Berechne rekursiv drei die Temperatur nach 10, 20 und 30 Minuten.
b) Stelle die Funktionsgleichung für die Abkühlungsfunktion auf.
c) Wie groß wird die Temperatur nach 1 h sein?
d) Wann sind 40°C erreicht?
e) In welcher Zeitspanne nimmt die Temperaturdifferenz zur Zimmertemperatur um ein Drittel ab?

Lösung:

a) Rekursive Berechnungsformel:

Grundlage der ganzen Berechnungen ist die Folge der Differenzen zwischen der Pudding-temperatur zum Zeitpunkt t, also T(t) und der Grenztemperatur S = 22°C

Differenzenfolge: $d(t) = T(t) - S$ (1)

Abnahmebedingung: $d(t+1) = d(t)\cdot 0{,}8$ (2)

Schrittweises Berechnen der gesuchten Temperaturwerte:

Startwert: $T(0) = 80$. Temperaturdifferenz: $d(0) = 80 - 22 = 58$

t = 1 bedeutet hier 10 Minuten usw.

$T(1) = S + d(1)$ mit $d(1) = d(0)\cdot 0{,}8 = 58\cdot 0{,}8 = 46{,}4$

Kurz: $T(1) = 22 + 58\cdot 0{,}8 = 22 + 46{,}8 = 68{,}8$

$T(2) = S + d(2) = S + d(1)\cdot 0{,}8 = S + d(0)\cdot 0{,}8^2$

Kurz: $T(2) = 22 + 58\cdot 0{,}8^2 = 59{,}12$ (nach 20 Minuten)

Kurz: $T(3) = 22 + 58\cdot 0{,}8^3 \approx 51{,}7$ (nach 30 Minuten)

b) Aufstellen der Funktionsgleichung

Ansatz: $T(t) = a\cdot b^t + c$

Berechnung von a, b und c durch Einsetzen dreier berechneter Werte aus (a).
Ich stelle jetzt auf Minuten-Takt um: t sei jetzt die Zahl der Minuten:

$T(0) = 80$ eingesetzt: $80 = a\cdot \cancel{b^0} + c$ (1)

$T(10) = 68{,}4$ $68{,}4 = a\cdot b^{10} + c$ (2)

$T(20) = 59{,}12$ $59{,}12 = a\cdot b^{20} + c$ (3)

Elimination von c: (3) – (2): $-9{,}28 = ab^{20} - ab^{10}$ (4)

(2) – (1): $-11{,}6 = a \cdot b^{10} - a$ (5)

Rechts ausklammern: $-9{,}28 = a \cdot b^{10}\left(b^{10} - 1\right)$ (4')

$-11{,}6 = a \cdot \left(b^{10} - 1\right)$ (5')

a eliminieren durch $\frac{(4')}{(5')}$: $\frac{-9{,}28}{-11{,}6} = \frac{\cancel{a}b^{10} \cdot \cancel{\left(b^{10}-1\right)}}{\cancel{a} \cdot \cancel{\left(b^{10}-1\right)}} \Rightarrow b^{10} = \frac{9{,}28}{11{,}6} = 0{,}8$

$b = \sqrt[10]{0{,}8} \approx 0{,}978$

In (5'): $-11{,}6 = a \cdot (0{,}8 - 1) \Rightarrow a = \frac{-11{,}6}{-0{,}2} = 58$

In (1): $80 = 58 + c \Rightarrow c = 22$

Ergebnis: $\boxed{T(t) = 58 \cdot 0{,}978^t + 22}$

Hinweis: Es gibt einen verkürzten Ansatz, der die Lösung schnell erledigt.
Dazu muss man aber mehr Hintergrundwissen haben.
Interessierte finden dies auf Seite 24 im Text 18213.

c) Puddingtemperatur nach 60 Minuten: $T(60) = 22 + 58 \cdot 0{,}978^{\boxed{60}}$

Taschenrechner: $T(60) = 37{,}3$

Ergebnis: Nach einer Stunde hat sich der Pudding auf 37,3°C abgekühlt.

d) Gesucht ist der Zeitpunkt t für T(t) = 40.

Temperaturfunktion: $T(t) = 22 + 58 \cdot 0{,}978^t$

T(t) = 40 einsetzen: $\boxed{40} = 22 + 58 \cdot 0{,}978^t$

Umstellen nach t: $58 \cdot 0{,}978^t = 40 - 22$

$58 \cdot 0{,}978^t = 18$

$0{,}978^t = \frac{18}{58}$

Logarithmieren: $\log 0{,}978^t = \log \frac{18}{58}$

Logarithmengesetze anwenden: $t \cdot \log 0{,}978 = \log 18 - \log 58$

$t = \frac{\log 18 - \log 58}{\log 0{,}978} \approx 52{,}6$

Ergebnis: Nach 52 Minuten und 36 Sekunden ist die Temperatur 40°C erreicht.

e) Temperatur zur Zeit t: $T(t) = 22 + 58 \cdot 0{,}978^{t}$.

Temperaturdifferenz zu S = 22 zur Zeit t: $\Delta T(t) = T(t) - 22 = 58 \cdot 0{,}978^{t}$

zur Zeit $t + \Delta t$: $\Delta T(t+\Delta t) = T(t+\Delta t) - 22 = 58 \cdot 0{,}978^{t+\Delta t}$

Abnahme um ein Drittel, also auf zwei Drittel: $\Delta T(t+\Delta t) = \frac{2}{3} \cdot \Delta T(t)$

Eingesetzt: $58 \cdot 0{,}978^{t+\Delta t} = \frac{2}{3} \cdot 58 \cdot 0{,}978^{t}$

Umformen: $\cancel{58 \cdot 0{,}978^{t}} \cdot 0{,}978^{\Delta t} = \frac{2}{3} \cdot \cancel{58 \cdot 0{,}978^{t}}$

Logarithmieren: $\log 0{,}978^{\Delta t} = \log \frac{2}{3}$

Logarithmengesetze anwenden: $\Delta t \cdot \log 0{,}978 = \log 2 - \log 3$

$$\Delta t = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 0{,}978} \approx 18{,}2\,.$$

Ergebnis: Nach etwa 18 Minuten hat die Temperaturdifferenz um ein Drittel abgenommen.

Hinweis: Es ist viel günstiger, diese Rechnung allgemein durchzuführen und erst am Ende einzusetzen. Wer das nachlesen möchte, findet diese Art der Lösung im Text 18213 auf Seite 26.

Lösung Nr. 522

Abkühlung einer Suppe auf Zimmertemperatur

Eine heiße Suppe hat zur Zeit t = 0 die Temperatur 70^O C. Sie kühlt durch die umgebende 18 ^{O}C warme Zimmerluft ab. Dabei nimmt die Temperaturdifferenz pro 30 Sekunden um 10 % ab.

a) Berechne rekursiv die Temperatur nach 30, 60 und 90 Sekunden.

b) Stelle die Temperaturgleichung auf. Sie hat diese Form: $T(t) = c + a \cdot q^t$.
(Ergebnis: $T(t) = 18 + 52 \cdot 0{,}9965^t$, t ist die Zeit in Minuten)

Wie hoch ist die Temperatur 10 Minuten nach Beginn der Abkühlungsphase?

c) Wann ist die Suppe auf 30 ^{O}C abgekühlt?

d) Berechne die Zeitspanne, in der die Temperaturdifferenz zur Umgebung um die Hälfte abgenommen hat (Halbwertszeit für d(T)).

Vergleiche dies mit der Zeit, in der die Suppe nur noch die Hälfte ihrer Anfangstemperatur hatte.

Lösung:

a) Im Ansatz $T(t) = c + a \cdot q^t$ ist K die Grenztemperatur, also die Zimmertemperatur S = 18^{O}C.

Für t nehmen wir die Zeiteinheit 30 Sekunden.

Rekursive Berechnung einiger Temperaturwerte.

Anfangstemperatur: $T(0) = 70$ Temperaturdifferenz: $d(0) = 70 - 18 = 52$.

Zur Zeit t = 1 beträgt die Temperaturdifferenz noch $d(1) = d(0) \cdot 0{,}9 = 52 \cdot 0{,}9 = 46{,}8$

Suppentemperatur : $T(1) = S + d(1) = 18 + 46{,}8 = 64{,}8 \approx 65$ (Nach 30 sek)

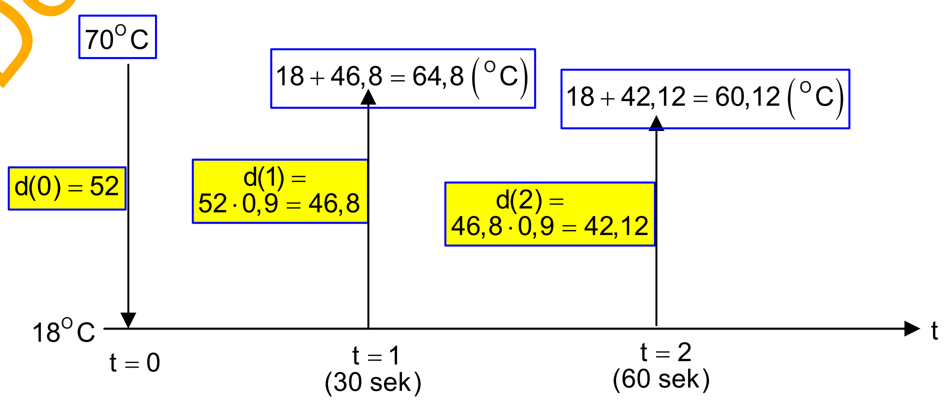
Zur Zeit t = 2: Temperaturdifferenz: $d(2) = d(1) \cdot 0{,}9$ oder $= d(0) \cdot 0{,}9^2 = 42{,}12$

Suppentemperatur : $T(2) = S + d(2) \approx 18 + 42 = 60$ (Nach 60 sek)

Zur Zeit t = 3: Temperaturdifferenz: $d(3) = d(2) \cdot 0{,}9$ oder $= d(0) \cdot 0{,}9^3 = 37{,}9$

Suppentemperatur : $T(3) = S + d(3) \approx 18 + 38 = 56$ (Nach 90 sek)

Diese Grafik verdeutlicht die Methode: Zur Zimmertemperatur kommt immer eine pro 30 sek. um 10% zurückgehende Temperaturdifferenz dazu.



b) Aufstellung der Temperaturgleichung

Ansatz: $T(t) = c + a \cdot q^t$

In diesem Ansatz wird t laut Aufgaben in Minuten eingesetzt:

$T(0) = 70$ eingesetzt: $70 = c + a \cdot \cancel{q^0}$ (1)

Nach 30 Sek.: $T(1) = 64{,}8$: $64{,}8 = c + a \cdot q^{30}$ (2)

Nach 60 Sek.: $T(2) = 60{,}12$ $60{,}12 = c + a \cdot q^{60}$ (3)

c eliminieren: (3) – (2): $-4{,}68 = a \cdot q^{60} - aq^{30} = a \cdot q^{30}\left(q^{30} - 1\right)$ (4)

(2) – (1): $-5{,}2 = a \cdot q^{30} - a = a \cdot \left(q^{30} - 1\right)$ (5)

a eliminieren: $\frac{(4)}{(5)}$: $\frac{-4{,}68}{-5{,}2} = \frac{\cancel{a} \cdot q^{30} \cdot \cancel{\left(q^{30}-1\right)}}{\cancel{a} \cdot \cancel{\left(q^{30}-1\right)}} = q^{30} \Rightarrow q = \sqrt[30]{0.9} \approx 0{,}9965$

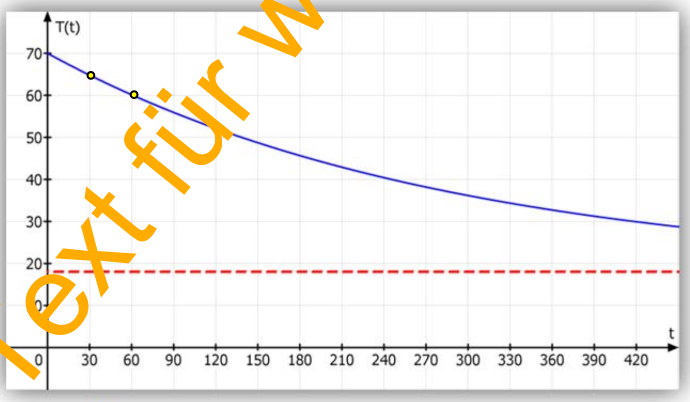
In (3): $-5{,}2 = a \cdot (0{,}9 - 1) \Rightarrow a = \frac{-5{,}2}{-0{,}1} = 52$

In (1): $70 = c + 52 \Rightarrow c = 18$

Ergebnis: $T(t) = 18 + 52 \cdot 0{,}9965^t$

Nach 10 Minuten ist t = 600: $T(600) = 18 + 52 \cdot 0{,}99965^{600} \approx 24{,}3$

SCHAUBILD:



c) Wann ist die Suppe auf 30 °C abgekühlt?

Vorgabe war $T(t) = 30$: $\boxed{30} = 18 + 52 \cdot 0{,}9965^t$

Umstellen nach t: $52 \cdot 0{,}9965^t = 30 - 18 = 12$

$0{,}9965^t = \frac{12}{52}$

Logarithmieren: $\log 0{,}9965^t = \log \frac{12}{52}$

Logarithmengesetze anwenden: $t \cdot \log 0{,}9965 = \log 12 - \log 52$

$t = \frac{\log 12 - \log 52}{\log 0{,}9965} \approx 418$

Ergebnis: Nach 418 Sekunden, das sind etwa 7 Minuten beträgt die Temperatur noch 30 °C.

d) Berechne die Zeitspanne, in der die Temperaturdifferenz zur Umgebung um die Hälfte abgenommen hat (**Halbwertszeit für** d(t)).

Vergleiche dies mit der Zeit, in der die Suppe nur noch die Hälfte ihrer Anfangstemperatur hatte.

1. Lösung - speziell

Temperaturfunktion: $T(t) = 18 + 52 \cdot 0{,}9965^t$

Temperaturdifferenz zu S = 18 zur Zeit t: $d(t) = T(t) - 18 = 52 \cdot 0{,}9965^t$

zur Zeit $(t + \Delta t)$: $d(t+\Delta t) = T(t+\Delta t) - 18 = 52 \cdot 0{,}9965^{t+\Delta t}$

Halbwertszeitbedingung: $\boxed{d(t+\Delta t) = \frac{1}{2} \cdot d(t)}$

Funktionsterme eingesetzt: $52 \cdot 0{,}9965^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 0{,}9965^t$

Potenzgesetz anwenden: $52 \cdot 0{,}9965^t \cdot 0{,}9965^{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 0{,}9965^t$

Vereinfachen: $\cancel{52 \cdot 0{,}9965^t} \cdot 0{,}9965^{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{52 \cdot 0{,}9965^t}$

Ergibt: $0{,}9965^{t\Delta t} = \frac{1}{2}$

Logarithmieren: $\log 0{,}9965^{t\Delta t} = \log \frac{1}{2}$ $\quad (\log \frac{1}{2} = -\log 2)$

Logarithmengesetze anwenden: $\Delta t \cdot \log 0{,}9965^t = -\log 2$

$$\Delta t = \frac{-\log 2}{\log 0{,}9965^t} \approx 197{,}7$$

Ergebnis: Nach einer Zeitspanne von etwa 198 Sekunden hat die Temperaturdifferenz zur Grenz-(Zimmer-)Temperatur auf die Hälfte abgenommen.

ACHTUNG: Man sollte den Unterschied kennen:

Bei einer unbeschränkten Abnahme auf 0 (wie beim radioaktiven Zerfall) bezieht sich die Halbwertszeit auf die Abnahme der Funktionswerte selbst.

Bei einer beschränkten Abnahme gegen einen Grenzwert ungleich 0 bezieht sich die Halbwertszeit auf die Abnahme der Differenz zwischen Funktionswert und Grenzwert.

2. Lösung - allgemein (empfohlen)

Temperaturfunktion: $T(t) = K + B \cdot q^t$

Temperaturdifferenz zu S zur Zeit t: $d(t) = T(t) - S = a \cdot q^t$

zur Zeit $(t + \Delta t)$: $d(t+\Delta t) = T(t+\Delta t) - S = a \cdot q^{t+\Delta t}$

Halbwertszeitbedingung: $\boxed{d(t+\Delta t) = \frac{1}{2} \cdot d(t)}$

Funktionsterme eingesetzt: $a \cdot q^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot q^t$

Potenzgesetz anwenden: $a \cdot q^t \cdot q^{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot q^t$

Vereinfachen: $\cancel{a \cdot q^t} \cdot q^{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{a \cdot q^t}$

Ergibt: $q^{\Delta t} = \frac{1}{2}$

Logarithmieren: $\log q^{\Delta t} = \log \frac{1}{2}$

Logarithmengesetze anwenden: $\Delta t \cdot \log q = -\log 2$

$$\Delta t = \frac{-\log 2}{\log q}$$

Nun q = 0,81 einsetzen: $\Delta t = \dfrac{-\log 2}{\log 0{,}9965^t} \approx 197{,}7$

(Weil q eine Zahl zwischen 0 und 1 ist, wird log q eine negative Zahl, was zu einem positiven Ergebnis für den Bruch, also für Δt führt.)

Im Vergleich dazu:

Nach welcher Zeit ist die Suppe auf die Hälfte abgekühlt?

(Also nicht: Wann hat sich die Temperaturdifferenz halbiert? – das hatten wir eben!)

Temperaturfunktion: $T(t) = 18 + 52 \cdot 0{,}9965^t$

Bedingung: $T(t) = \frac{1}{2} \cdot T(0) = 35$ $\boxed{35} = 18 + 52 \cdot 0{,}9965^t$

Nach t umstellen: $52 \cdot 0{,}9965^t = 35 - 18 = 17$

$$0{,}9965^t = \frac{17}{52}$$

Logarithmieren: $t \cdot \log 0{,}9965 = \log \frac{17}{52} = \log 17 - \log 52$

$$t = \frac{\log 17 - \log 52}{\log 0{,}9965} \approx 319$$

Ergebnis: Nach 319 Sekunden ist die Suppe nur noch „halb so heiß".

Wir müssen also festhalten: Nach 198 Minuten hat sich die Temperaturdifferenz halbiert, nach 319 Minuten hat sich die Anfangstemperatur halbiert.

Lösung Nr. 522

Mäuseexperiment

In einem Versuchslabor werden Mäuse mit einer Krankheit infiziert. Ein Medikament soll eingesetzt werden, und man will die Wirksamkeit testen. In der Versuchsreihe stehen 100 Tiere zur Verfügung. Nach 1 Tag leben noch 84 Tiere, nach dem 2. Tag noch 74.

Wie viele Tiere (Menge L) werden langfristig nicht überleben, wenn man beschränkte Abnahme voraussetzt? Wann werden drei Viertel dieser zu erwartenden Menge gestorben sein? Wann etwa kann man davon ausgehen, dass vermutlich kein Tier mehr an dieser Ursache sterben wird.

(Hilfe: Die Funktion, welche die Anzahl der lebenden Tiere wiedergibt ist $n(t) = 43 \cdot 0{,}625^t + 57$.

Die Koeffizienten wurden sinnvoll gerundet)

Lösung:

Es sei n(t) die Zahl der Tiere, die nach t mal 24 Stunden noch leben.

Wir machen den Ansatz: $n(t) = a \cdot b^t + c$

n(0) = 100: $100 = a \cdot \cancel{b^0} + c$ (1)

n(1) = 84: $84 = a \cdot b + c$ (2)

n(2) = 74: $74 = a \cdot b^2 + c$ (3)

Elimination von c: (3) – (2): $-10 = ab^2 - ab = ab \cdot (b-1)$ (4)

(2) – (1): $-16 = ab - a = a \cdot (b-1)$ (5)

Elimination von a: $\frac{(4)}{(5)}$: $\frac{10}{16} = \frac{\cancel{a} \cdot b \cdot \cancel{(b-1)}}{\cancel{a} \cdot \cancel{(b-1)}} \Leftrightarrow b = \frac{10}{16} = 0{,}625$

In (5): $-16 = a \cdot (0{,}625 - 1) \Rightarrow a = \frac{-16}{-0{,}375} \approx 42{,}67$

In (1): $100 = 42{,}67 + c \Rightarrow c = 57{,}33$

Ergebnis: $n(t) = 42{,}67 \cdot 0{,}625^t + 57{,}33$

Rundet man a und c, folgt: $\boxed{n(t) = 43 \cdot 0{,}625^t + 57}$

Für $t \to \infty$ geht 0,625 gegen 0, was man auch so schreiben kann: $\lim\limits_{t \to \infty} 0{,}625^t = 0$

Daher gilt: $\lim\limits_{t \to \infty} n(t) = 57$

Man muss wissen, dass es sich hier um ein mathematisches Modell handelt, das die Wirklichkeit nur grob wiedergeben kann. Hier muss man abrunden und sagen: Im Mittel werden 57 Mäuse überleben.

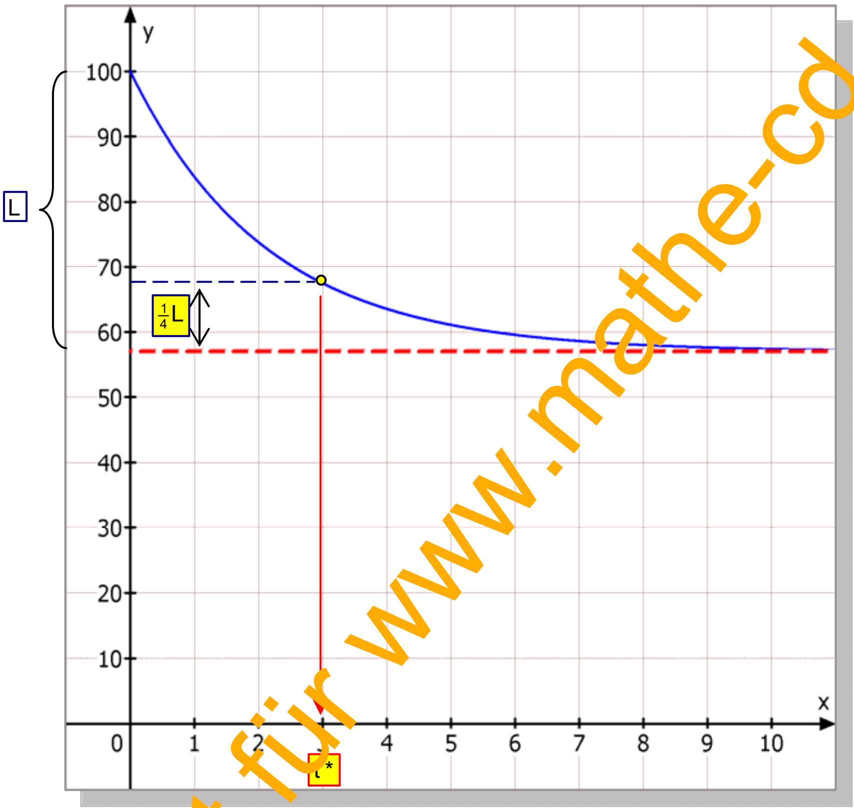
Mit anderen Worten: Man kann erwarten, dass etwa 43 der anfänglich 100 Tiere bei dieser Versuchsreihe sterben werden.

Der Abnahmefaktor ist q = 0,625. Dieser besagt, dass die Differenz $d(t) = n(t) - 57$

mit dem Faktor 0,625 abnimmt: $d(t+1) = d(t) \cdot 0{,}625$.

Mit anderen Worten: Die Anzahl der wahrscheinlich sterbenden Mäuse nimmt pro Tag mit $p = 1 - q = 0{,}375 = 37{,}5\%$ ab und geht gegen 43.

Schaubild:



Die Menge L der Tiere die nach dem Modell der beschränkten Abnahme dieses Experiment nicht überleben werden ist $L = n(0) - g = 100 - 57 = 43$. Wenn $\frac{3}{4}$ davon gestorben sein werden, dann leben davon noch $\frac{1}{4}L \approx 11$, also insgesamt $n(t) = 57 + 11 = 68$.

d. h.: $43 \cdot 0{,}625^t + 57 = 68$ | -57

$43 \cdot 0{,}625^t = 11$ | :43

$$0{,}625^t = \frac{11}{43}$$

Logarithmieren: $\log\left(0{,}625^t\right) = \log \frac{11}{43}$

Logarithmengesetze: $t \cdot \log 0{,}625 = \log 11 - \log 43$ | :log 0,625

$$t = \frac{\log 11 - \log 43}{\log 0{,}625} \approx 2{,}9$$

Ergebnis: Nach etwa 3 mal 34 Stunden (3 Tagen) ist3 Viertel der zu erwartenden Menge gestorben.

Die letzte Frage bezieht sich darauf, wann man davon ausgehen kann, dass keines mehr sterben wird. Wenn die Anzahl der innerhalb dieser Versuchsreihe überlebenden Tiere bei 57 liegt, muss man die Frage stellen, wann n(t) < 58 sein wird?

$$43 \cdot 0{,}625^{t} + 57 < 58 \qquad | \ -57$$

$$43 \cdot 0{,}625^{t} < 1 \qquad | \ :43$$

$$0{,}625^{t} < \tfrac{1}{43}$$

Logarithmieren: $\log 0{,}625^{t} < \log \tfrac{1}{43}$

Logarithmengesetze: $t \cdot \log 0{,}625 < -\log 43 \qquad | \ : \log 0{,}625$

$$t < \frac{-\log 43}{\log 0{,}625} \approx 8$$

Ergebnis: Nach etwa 8 Tagen kann man davon ausgehen, dass aus gegebener Ursache kein weiteres Tier mehr sterben wird.

Lösung Nr. 530

Aufladen eines Kondensators

Für die Aufladefunktion des Kondensators gelte: $Q(t) = 2 - 2 \cdot 0{,}135^t$

t sei die Zeit in Sekunden, Q die auf dem Kondensator befindliche Ladung.

a) Bestimme die maximale Ladung des Kondensators, die zu dieser Funktion gehört.

b) Die Ladungszunahme des Kondensators beschreibt man durch die Abnahme der Differenz zwischen vorhandener Ladung und Maximalladung.
Um wie viel Prozent nimmt diese Differenz pro Sekunde ab?.

c) Wann ist der Kondensator halb aufgeladen?

d) Wann fehlt nur noch 1 Promille zur der Maximalladung?

Lösung:

a) Die gegebene Ladungsfunktion des Kondensators ist: $Q(t) = 2 - 2 \cdot 0{,}135^t$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} 0{,}135^t = 0$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} Q(t) = 2$.

Ergebnis: $Q_{max} = 2$.

b) Die Ladungsdifferenz zur Maximalladung ist:

$$d(t) = Q_{max} - Q(t) = 2 - \left(2 - 2 \cdot 0{,}135^t\right) = 2 \cdot 0{,}135^t$$

Die Ladungsdifferenz nimmt also exponentiell mit q = 0,135 ab.

Wegen p = 1- q = 0,865 gilt:

Pro Zeiteinheit (Sekunde) nimmt die Ladungsdifferenz um 86,5 % ab!

Die Ladekurve geht also anfänglich steil nach oben (siehe Abbildung).

c) Wann ist der Kondensator halb aufgeladen? $\boxed{Q(t) = \frac{1}{2} \cdot Q_{max}}$

$2 - 2 \cdot 0{,}125^t = 1$

$2 \cdot 0{,}135^t = 1$

$0{,}135^t = \frac{1}{2}$

Logarithmieren: $\log 0{,}135^t = \log \frac{1}{2}$

Logarithmusgesetze anwenden: $t \cdot \log 0{,}135 = -\log 2$

$t = \dfrac{-\log 2}{\log 0{,}135} \approx 0{,}346$

Ergebnis: Bereits nach 0,346 (s) ist der Kondensator zur Hälfte aufgeladen.

d) Wann fehlt nur noch 1 Promille der Maximalladung?

Ladungsdifferenz: $\Delta Q = d(t) = 2 \cdot 0{,}135^t$

1 Promille von $Q_{max} = 2$: $\Delta Q = \frac{1}{1000} \cdot 2 = 0{,}002$

Gleichsetzen: $2 \cdot 0{,}135^t = 0{,}002$

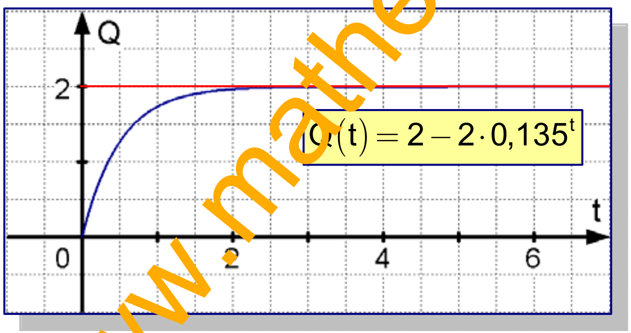
$0{,}135^t = 0{,}001$

Logarithmieren: $\log 0{,}135^t = \log 0{,}001$

Logarithmengesetze anwenden: $t \cdot \log 0{,}135 = -3$

$$t = \frac{-3}{\log 0{,}135} \approx 3{,}45$$

$\boxed{\log_{10} 0{,}001 = \log_{10} 10^{-3} = -3}$



Ergebnis:

Nach etwa 0,35 s ist der Kondensator halb aufgeladen.